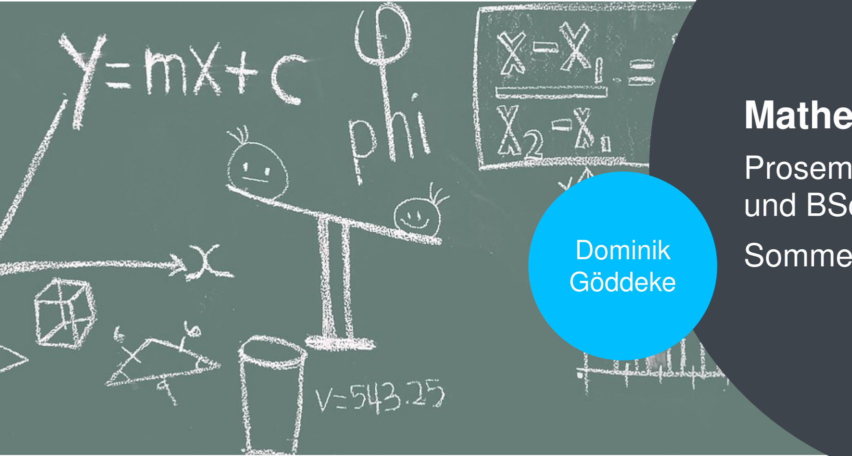
Universität Stuttgart
FB Mathematik und SC SimTech



Mathematisches CAD

Proseminar BSc Mathematik und BSc LA

Sommersemester 2020

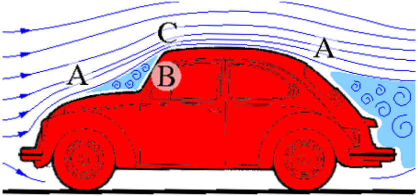
Dominik Göddeke

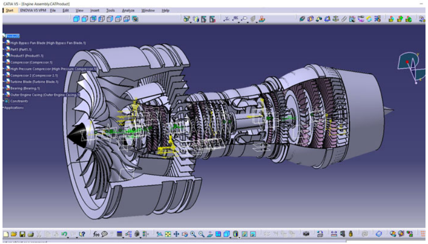
ians

SimTech

Einleitung

- CAD (Computer Aided Design) ist ein zentrales Werkzeug
  - In der Computergrafik, im Webdesign
  - In der ingenieurswissenschaftlichen Praxis bei fast allen Simulationen
  - Bei vielen potentiellen Arbeitgebern

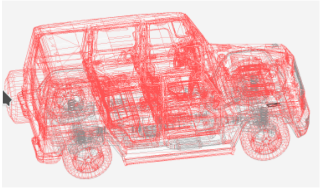




Wikimedia (CC BY-SA 4.0), catia.com

Einleitung

- Abstrakt geht es um die kompakte Repräsentation von Kurven und Flächen
  - Mit garantierten Eigenschaften, bspw. Glattheit oder Interpolation
  - Mit einem intuitiven Verlauf trotz Definition über „wenige“ Punkte
  - Mit einer effizient auswertbaren algorithmischen Beschreibung
  - Mit einer Auswertungsmöglichkeit auch „außerhalb“ der Spezifikation
  - …



grabcad.com

Stand in der Numerik 1

Definition 8.1 (Splines, Spline-Funktionen)

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit den *Knoten* x_i. Eine Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Spline k-ten Grades (k-ter Ordnung)*, falls $s \in C^{k-1}([a, b])$ und $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_k([x_{i-1}, x_i])$ für $i = 1, \ldots, n$. Wenn ein Spline zu gegebenen Stützwerten $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ die Interpolationsbedingungen $s(x_i) = f_i$ an allen Stützstellen erfüllt, nennen wir ihn *interpolierend*. Die Menge aller Splines k-ter Ordnung zu einer gegebenen Zerlegung $\Delta(n)$ von $[a, b]$ in n Teilintervalle bezeichnen wir als $S^k_{\Delta(n)}([a, b])$.

- Fall $k = 3$: kubische Splines sind stückweise definierte $\mathcal{P}_3$-Funktionen, die global C^2 sind
- Interpolation: sie verlaufen durch die vorgegebenen Punkte (x_i, f_i)

Stand in der Numerik 1

Satz 8.3 (Existenz und Eindeutigkeit)

Der interpolierende kubische natürliche Spline $s \in S^3_{\Delta(n)}([a,b])$ existiert und ist eindeutig bestimmt durch die zusätzliche Vorgabe von $s''(a) = s''(b) = 0$.

- Beweis: Konstruktiv durch eine Berechnungsvorschrift für $s(x)|_{[x_{i-1},x_i]} = p_i(x)$ für $i = 1,\dots,n$ mit Polynomen $p_i \in \mathcal{P}_3$ zur Bestimmung der Koeffizienten von

$$p_i(x) \quad = \quad \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3$$

- Netter praxisrelevanter Bonus: Aufwand zur Bestimmung aller Koeffizienten ist $O(n)$

Offene Fragen und Probleme

Lokalität

- Änderung eines Datenpaars (x_i, f_i) ändert die Gestalt des gesamten Splines
- Hinzufügen eines Datenpaars ändert die Gestalt des gesamten Splines, obwohl sich per Definition der lokale Grad nicht ändert (!?!?)
- Praxis: komplette Neuberechnung nötig, sehr ineffizient

Kognitionspsychologie

- Der Mensch empfindet C^2 als optisch glatt, kein Unterschied zu C^{42} oder C^∞

Lösung, und erstes Thema des Proseminars

- B-Splines und NURBS
- Nur lokale Neuberechnung nötig, Aufwand $\ll O(n)$

Stand in der Numerik 1

Satz 8.6 (Minimum-Norm Eigenschaft natürlicher Splines)

Der kubische natürliche interpolierende Spline s erfüllt die *Minimum-Norm Eigenschaft*

$$\|s\|_{\text{kr},[a,b]} \leq \|f\|_{\text{kr},[a,b]}$$

bezüglich jeder die Interpolationsbedingungen $s(x_i) = f(x_i)$ erfüllenden Funktion f, wenn für f die (technischen) Voraussetzungen des Satzes von Holladay gelten.

- Der Spline wackelt (im Integralmittel) nicht mehr als die Funktion, die die Daten $f_i = f(x_i)$ generiert
- Noch besser: Unter allen Funktionen, die die gegebenen Daten interpolieren, wackelt der Spline am wenigsten
- Das ist eine bereits sehr mächtige globale Optimalitätsaussage (!)

Offene Fragen und Probleme

Kontrolle der Gestalt

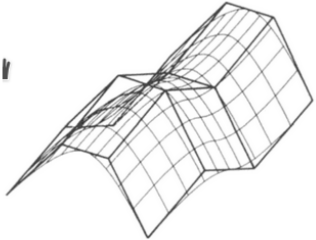
- Vorgabe von Interpolationsdaten ist natürlich
- Liefert aber keine intuitive Gestalt (trotz der Wackel-Optimalität) außerhalb dieser Punkte
- Bis auf kognitionsspsychologische Resultate, denn der Mensch zeichnet optimale Interpolierende beobachtbar so, wie Splines aussehen

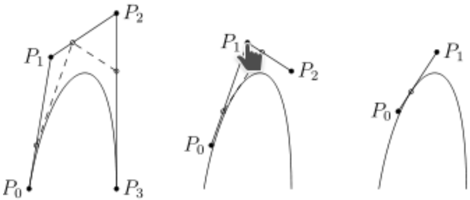
Lösung, und zweites Thema des Proseminars

- Übergang zu sogenannten Kontrollpunkten, die die Gestalt implizit definieren
- Deren Manipulation ist viel intuitiver im Hinblick auf die Gestalt der Kurve
- Bonuseffekt: einfache Übertragung von Kurven auf Flächen

Offene Fragen und Probleme

- Führt letztendlich bspw. auf Bézier-Kurven und -flächen
- Konvexe-Hülle-Eigenschaft
- Algorithmen von de Boor und de Casteljau





Stand in der Numerik 1

Satz 8.10 (Konvergenz der Spline-Interpolation)

Sei $f \in C^4([a,b])$ und $|f^{(iv)}(x)| \leq L$ für $x \in [a,b]$. Weiter gelte für die zugrundeliegende Zerlegung

$$\frac{h_{\text{max}}}{|x_i - x_{i-1}|} \leq K \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Sei zudem $s \in S^3_{\Delta(n)}([a,b])$ ein interpolierender vollständiger Spline. Dann gibt es von $\Delta(n)$ unabhängige Konstanten c_0, c_1, c_2 und eine Konstante c_3, so dass für $x \in [a,b]$ gilt:

$$\left| f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x) \right| \leq \begin{cases} c_k L h_{\text{max}}^{4-k} & \text{für } k = 0,1,2 \\ c_3 L K h_{\text{max}} & \text{für } k = 3 \end{cases}$$

- Vergleiche Satz von Weierstraß

Offene Fragen und Probleme

Punktweise Konvergenz ist einfacher als gleichmäßige Konvergenz

- Punktweise in den Interpolationsdaten trivial per Definition der Interpolation
- Letzter Satz: Gleichmäßige (nicht punktweise) Konvergenz des Splines und seiner ersten beiden Ableitungen ($\rightarrow$ Kognitionspsychologie) unabhängig von der Zerlegung

Drittes Thema des Proseminars

- Übertragung dieses Konvergenzresultats auf B-Splines, NURBS und Bézier
- Ist der Approximationssatz von Weierstraß der Weisheit letzter Schluss?
- Was bedeutet der topologische Unterschied zwischen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ im Raum $C^0([a, b])$?

Ziele und Konzeption des Proseminars

Vertieftes Verständnis der ANA1+2 und der NUM1

- Anhand von mathematisch spannenden „offenen Fragen“ aus diesen Vorlesungen
- Natürlich: „was kann ich damit machen?“
- Besser: „Wie kann ich die Inhalte jder bisherigen Vorlesungen noch besser und mit einem hoffentlich großen Verständnis-ε miteinander verknüpfen?“

Dazu: Eintauchen in eine breit praxisrelevante Anwendung, CAD

- Berufsrelevanz klar
- „Meine Oma versteht das mathematische Problem“

Zielgruppe und Voraussetzungen

- Proseminar im BSc Mathe, Lehramtsseminar im BA LA
- Studierende, die das Thema sexy finden
- Studierende, die die NUM1 spannend finden
- Studierende, die die Informatik mit der Mathe-Brille betrachten
- Breite Themen im Spektrum zwischen Algorithmik und Konvergenzanalyse
- Wichtig: Absolvierung des Moduls NUM1 hilfreich, aber nicht nötig
- Essentiell: Kenntnisse von LAAG1 und ANA1+2
- Details bei der Themenvergabe

Administratives

Vorbesprechung und Themenvergabe

- 18.3., 15 Uhr, AMR5b Raum 0.31
- Fragen zum Fokus immer gerne vorab per Mail
- **Anmeldung zur Vorbesprechung per Mail**

Durchführung des Seminars

- Blockvorträge je nach Teilnehmerzahl im Rhythmus 3–4 Wochen
- Einarbeitung in das individuelle Thema im jeweiligen Block
- Scheinkriterium: benoteter Vortrag