

Universität Stuttgart

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation

Ein iteratives Gebietszerlegungsverfahren für die Reduzierte-Basis-Methode

Diplomarbeit

Diplomstudiengang Mathematik

vorgelegt von
Immanuel Maier

betreut von
Jun.-Prof. Dr. Bernard Haasdonk

2. September 2011

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich sehr bei meinem Betreuer Jun.-Prof. Dr. Bernard Haasdonk bedanken. Durch seine Art der Betreuung hat er sowohl die Entwicklung meines mathematischen Denkens und Arbeitens als auch die Entwicklung meiner Persönlichkeit gefördert. Er vermittelte mir sehr viel Spaß an der Arbeit und war immer ein freundlicher und offener Ansprechpartner.

Weiter bedanke ich mich bei der ganzen Arbeitsgruppe Haasdonk – Markus Dihlmann, Sven Kaulmann, Daniel Wirtz und Oliver Zeeb – für den netten Umgang und die stetige Hilfsbereitschaft. Bei Sven und Daniel bedanke ich mich auch für das Korrekturlesen.

Meiner ganzen Familie und vor allem meinen Eltern danke ich, dass sie in jeder Situation zu mir standen und mir den nötigen Halt gaben. Ohne sie wäre mein Studium und damit auch diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Nun möchte ich noch meiner Freundin Maike Martini dafür danken, dass sie mit mir den zweiten Abschnitt meines Studiums durchgestanden hat. Ihre Kritik hat mich immer bereichert und motiviert. Ihre Liebe ist ein Licht auf meinem Weg.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Volles Problem	7
2.1	Modellproblem	7
2.2	Schwache Form	7
2.3	Iteratives Schema für Gebietszerlegung	8
3	Reduziertes Problem	12
3.1	Definitionen	12
3.2	Problemformulierung	15
3.3	Beschränktheit der Normen	15
3.4	Matrix/Vektor-Formen	17
4	Analyse des Verfahrens	21
4.1	Vorbereitungen und erste Resultate	21
4.2	Konvergenz	24
4.3	A-posteriori Fehleraussagen	27
5	Offline/Online-Zerlegung	32
5.1	Affine Parameterabhängigkeit	32
5.2	Berechnungsvorschriften	33
5.2.1	Offline/Online-Zerlegung des reduzierten iterativen Verfahrens	34
5.2.2	Offline/Online-Zerlegung des Fehlerschätzers	35
6	Numerische Experimente	38
6.1	Modell	38
6.2	Detaillierte Simulation	39
6.3	Reduzierte Simulation	42
6.3.1	Verfahren	42
6.3.2	Fehlerschätzer	43
6.4	Reproduktion	45
6.4.1	Reproduktion der Iterierten	45
6.4.2	Reproduktion der Lösung	45
6.5	Basisgenerierung	46
6.5.1	Der Greedy-Algorithmus	46
6.5.2	Reine Snapshots	48
6.5.3	Bubble-Funktionen	49
6.5.4	Durchgeschnittene Snapshots	50
6.5.5	DS-Greedy	52
6.6	Zeitmessung	54

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
7 Ausblick	56
Literaturverzeichnis	57
A Implementierung	59
A.1 Funktionsweise/Aufruf	59
B Erklärung	62

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zerlegung eines Gebiets im \mathbb{R}^2	9
4.1	Problemübersicht und Zusammenhänge, siehe Gleichungen 2.2, 4.2 und Definitionen 2.12, 3.8	27
6.1	Modellgebiet Ω	38
6.2	Quellfunktion $h(\mu)$ für zwei unterschiedliche Parameter	39
6.3	FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems für 4 verschiedene Parameter	40
6.4	Fehler $\ u^n(\mu) - u(\mu)\ _{\hat{X}}$ der Iterierten aus der detaillierten Simulation zur FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems zu den Test-Parametern aus Tabelle 6.1 im Falle $h = 0.0884$	41
6.5	detaillierte Simulation für $\mu = (1.843, 2.878, 8.879, 0.874)$ und FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems	42
6.6	Fehler $\ u_N^n(\mu) - u(\mu)\ _{\hat{X}}$ der Iterierten aus der reduzierten Simulation FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems zu den Test-Parametern aus Tabelle 6.2, $h = 0.0884$	44
6.7	Effektivitäten $\Delta_N^n(\mu)/\ e_N^n(\mu)\ _{\hat{X}}$ zum 1., 4. und 8. Test-Parameter aus Tabelle 6.3	45
6.8	Vergleich der Fehler zur FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems aus der detaillierten $\ u^n(\mu^*) - u(\mu^*)\ _{\hat{X}}$ und der reduzierten Simulation $\ u_N^n(\mu^*) - u(\mu^*)\ _{\hat{X}}$	46
6.9	Vergleich der Relaxationsparameter abhängig von der Größe der Basen bei der BF- und der DS-Methode, $N_2^0 = 0$	51
6.10	DS-Greedy: Verlauf von m_Δ in Abhängigkeit von N für 3 verschiedene große Trainingsmengen $\mathcal{M}_{\text{train}}$ und 2 verschiedene FE-Diskretisierungen	53
6.11	DS-Greedy: Vergleich von m_Δ und m_e ; Verlauf von w_θ in Abhängigkeit von N für $h = 0.0884$, $ \mathcal{M}_{\text{train}} = 3^4$	54

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Simulation von physikalischen, chemischen oder biologischen Vorgängen treten häufig partielle Differentialgleichungen (PDE) als Modell auf. Bei vielen Anwendungen ist ein schnelles oder häufiges Lösen von PDE's gefragt, die sich nur in einem Parameter unterscheiden, sogenannte parametrische PDE's. Als Beispiele dienen eine Optimierungsaufgabe mit PDE-Constraints, bei der man viele Parameteranfragen hat und Handy-Anwendungen, bei denen man ein schnelles Ergebnis haben möchte.

Viele Diskretisierungsmethoden, wie zum Beispiel die Finite-Elemente-Methode (FE-Methode) oder die Finite-Volumen-Methode liefern große algebraische Systeme, welche oft nicht in einem realistischen oder erwünschten Zeitrahmen gelöst werden können. Die Reduzierte-Basis-Methode (RB-Methode) hingegen liefert online sehr kleine algebraische Systeme und eignet sich besonders bei Echtzeit-Problemen oder Viel-Parameteranfragen.

Die RB-Methode basiert auf einer Zerlegung in Offline-Berechnungen und Online-Berechnungen. Offline werden einige detaillierte Lösungen (Snapshots) mithilfe von genauen Diskretisierungsmethoden wie der FE-Methode berechnet. Es müssen also noch große algebraische Systeme gelöst werden. Allerdings muss dies nur einmal im Voraus getan werden. Anschließend können beliebig viele Lösungen zu unterschiedlichen Parametern in einem stark reduzierten System berechnet werden (Online).

Die Idee der RB-Methode ist bereits 1978 bei Almroth et al. [1] zu finden und hat im letzten Jahrzehnt einen großen Aufschwung erlebt. Die RB-Methode für lineare elliptische Probleme ist Standard und zum Beispiel in [18, 17] zu finden. Aber auch RB-Methoden für zeitabhängige Probleme [8, 10] wurden bereits studiert. Eine Anwendung auf Optimierungsprobleme ist in [16] zu finden. Besonders reizvoll wird die RB-Methode durch effiziente, online berechenbare a-posteriori Fehlerschätzer [18]. Mit solchen kann ein Greedy-Algorithmus zur adaptiven Basisgenerierung [21] realisiert werden. Haasdonk et al. [10] kombinierten den Greedy-Algorithmus mit der PCA (Principal Component Analysis). In aktuellen Arbeiten (Buffa et al. [6], Binev et al. [4] und Haasdonk [9]) wurde die Konvergenz des Greedy-Algorithmus untersucht.

Das Berechnen der Snapshots geschieht offline und muss daher nicht besonders schnell gehen. Allerdings muss die Zeit in einem realistischen Rahmen liegen, was bei heutigen Anwendungen unter Benutzung von einfachen Diskretisierungsmethoden nicht selbstverständlich ist. Deshalb hat diese Arbeit zum Ziel, die Offline-Berechnungen in einem Gebietszerlegungs-Modus durchzuführen. Die Idee der Gebietszerlegung ist es, eine Partielle Differentialgleichung als eine Zusammensetzung von mehreren, gekoppelten Gleichungen auf Teilgebieten zu formulieren. Dadurch erhält man mehrere kleinere algebraische Systeme, die leichter zu lösen sind. Zum anderen kann man die Algorithmen an

parallele Rechnerstrukturen anpassen, welche im Zeitalter der Höchstleistungsrechner eine große Bedeutung haben.

Es gibt bereits Ansätze die RB-Methode mit Gebietszerlegungsmethoden zu vereinigen. Maday et al. [13, 14] führten die Reduzierte-Basis-Element-Methode (RBE-Methode) ein, bei der bereits Snapshots auf Teilgebieten berechnet werden. Diese werden dann mit Lagrange-Multiplikatoren verbunden, aber die Offline-Berechnungen werden nicht gänzlich in einem zerlegten Modus durchgeführt. Huynh et al. [11] erweiterten die RBE-Methode im Jahr 2011, indem Sie bausteinartige Komponenten, die über “Ports” verbunden werden können, einführten.

In der Gebietszerlegung werden oft iterative Schemata verwendet, um das System gekoppelter Gleichungen zu lösen. In dieser Arbeit stellen wir ein iteratives Schema für die RB-Methode auf und können dadurch die Offline-Berechnungen komplett in einem zerlegten Modus durchführen.

Es gibt noch keine Arbeiten, in denen iterative Methoden für die RB-Methode untersucht wurden. In dieser Arbeit werden daher die wichtigsten Aspekte dieses Konzepts in einer angepassten Umgebung erarbeitet. Wir betrachten eine zeitunabhängige, elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung und als Vorbild für das iterative Schema das Dirichlet-Neumann Schema in sequentieller und daher nicht parallelisierbarer Form [15]. Die detaillierten Lösungen werden mit linearen Finiten Elementen berechnet. Das Hauptaugenmerk liegt also nicht auf der Parallelisierung, sondern darauf, eine Grundlage für weitere Arbeiten zu schaffen; sowohl theoretisch als auch numerisch.

Überblick

In Kapitel 2 führen wir das volle Problem ein, welches Ausgangspunkt für die Reduzierte Basis Approximation ist und greifen für die Arbeit relevante Grundlagen der Gebietszerlegung auf. In Kapitel 3 formulieren wir das reduzierte Verfahren. Noch im selben Kapitel und in Kapitel 4 vollziehen wir einige theoretische Untersuchungen; unter anderem beweisen wir Konvergenz des Verfahrens und stellen einen a-posteriori Fehlerschätzer bereit. Die bereits erwähnte Offline/Online-Zerlegung geben wir in Kapitel 5 an. Letztendlich sind in Kapitel 6 Herangehensweise und Ergebnisse der numerischen Experimente aufgeführt. Diese zielen vor allem darauf hin, eine für den Greedy-Algorithmus geeignete Basiskonstruktions-Strategie zu finden.

Kapitel 2

Volles Problem

2.1 Modellproblem

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ und ein Gebiet \mathcal{P} im Parameterraum \mathbb{R}^P , $P \in \mathbb{N}$. Für $\mu \in \mathcal{P}$ betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} L(\mu)u_{\text{kl}}(\mu) &= h(\mu) && \text{in } \Omega, \\ u_{\text{kl}}(\mu) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ sei hierbei $h(\mu)$ eine gegebene Funktion in $L^2(\Omega)$, $u_{\text{kl}}(\mu)$ die gesuchte klassische Lösung und der Differentialoperator $L(\mu)$ gegeben durch

$$L(\mu) = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x; \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0(x; \mu).$$

Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ fordern wir $a_{ij}(\mu) \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}(\mu) = a_{ji}(\mu)$ für $i, j = 1, 2$, $a_0(\mu) \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(\mu) \geq 0$ und

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x; \mu) \xi_i \xi_j \geq c_U(\mu) |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Wir haben also eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die zeitunabhängig und insbesondere elliptisch ist. Wir setzen außerdem voraus, dass die Funktionen h , a_0 und a_{ij} für $i, j = 1, 2$ affin parametrisch sind. Diese Voraussetzungen gehen erst in Kapitel 5 ein und werden deshalb erst dort erklärt.

2.2 Schwache Form

Nun sei ein Hilbertraum $X = H_0^1(\Omega)$ oder $X \subset H_0^1(\Omega)$, $\dim(X) < \infty$ mit Norm $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ gegeben. Mit der parametrischen Bilinearform $a : X \times X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$a(v, w; \mu) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\mu) \frac{\partial}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_i} w \, dx + \int_{\Omega} a_0(\mu) v w \, dx$$

und der parametrischen Linearform $f : X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(v; \mu) = \int_{\Omega} h(\mu) v \, dx$$

definieren wir das detaillierte unzerlegte Problem:

Definition 2.1 (Detailliertes unzerlegtes Problem):
 Das detaillierte unzerlegte Problem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \text{Zu } \mu \in \mathcal{P} \text{ suche } u(\mu) \in X \text{ mit} \\ & a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \quad \forall v \in X. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bemerkung 2.2:

Dies ist die schwache Form der Differentialgleichung. Unter den obigen Voraussetzungen an $a_0(\mu)$, $a_{ij}(\mu)$ und $h(\mu)$ ist a eine symmetrische, stetige, koerzive, parametrische Bilinearform und f eine stetige, parametrische Linearform. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u(\mu)$ folgt also aus dem Satz von Lax-Milgram.

Bemerkung 2.3:

Die Funktion $u(\mu)$ ist diejenige, die am Ende approximiert wird, egal ob $X = H_0^1(\Omega)$, oder ob X ein endlichdimensionaler Approximationsraum ist. In der Praxis ist X z.B. ein FE-Raum und $u(\mu)$ die FE-Lösung. Das bedeutet, dass wir dann den Fehler der FE-Lösung ausblenden.

2.3 Iteratives Schema für Gebietszerlegung

Jetzt betrachten wir eine Zerlegung des Gebiets Ω in zwei Gebiete, siehe Abbildung 2.1. Dabei stellen wir alle Bedingungen an die Zerlegung auf, die später benötigt werden.

Definition 2.4 (Gebietszerlegung):

Eine zulässige Gebietszerlegung des Gebiets Ω ist gegeben durch die Teilgebiete Ω_1, Ω_2 und das Interface Γ , wobei gilt

- $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$,
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$,
- $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$,
- $\Gamma, \partial\Omega_1 \setminus \Gamma$ und $\partial\Omega_2 \setminus \Gamma$ haben nicht verschwindendes $(n-1)$ -dimensionales Maß,
- Ω_1 und Ω_2 sind Lipschitz-Gebiete.

Wir definieren nun folgende Räume und Normen für $k = 1, 2$:

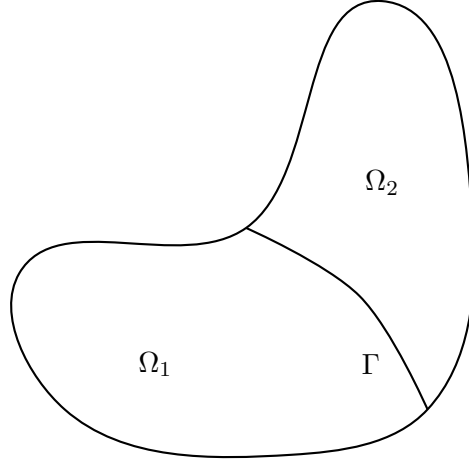
$$\begin{aligned} X_k &:= \{v|_{\Omega_k} \mid v \in X\} \subset H^1(\Omega_k), \\ X_k^0 &:= X_k \cap H_0^1(\Omega_k), \\ \|\cdot\|_{X_k} &:= \|\cdot\|_{H^1(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Folgende Aussage findet man in [19, 20], mit Beweis in [12].

Lemma 2.5 (Spur, Fortsetzung):

Unter den Voraussetzungen aus Definition 2.4 existiert eine eindeutige, lineare, stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ mit $\tilde{\gamma}v = v|_{\partial\Omega_1}$ für $v \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$, genannt Spuroperator. Desweiteren existiert eine lineare, stetige Abbildung $\tilde{R}_1^0 : H^{1/2}(\partial\Omega_1) \rightarrow H^1(\Omega_1)$ mit $\tilde{\gamma}(\tilde{R}_1^0 g) = g$ für $g \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, genannt inverser Spuroperator.

Lemma 2.5 gilt genauso mit dem Gebiet Ω_2 .

Abbildung 2.1: Zerlegung eines Gebiets im \mathbb{R}^2 **Korollar 2.6:**

Wir führen folgende Bezeichnung ein (analog für X_2):

$$\gamma : X_1 \ni v \mapsto (\tilde{\gamma}v)|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$$

und definieren damit

$$X_{\Gamma} := \gamma(X_1) = \gamma(X_2) \subset H^{1/2}(\Gamma).$$

Wir bezeichnen für $g \in X_{\Gamma}$ mit \tilde{g} die Fortsetzung auf $\partial\Omega_1$ durch Null und definieren damit

$$\|g\|_{X_{\Gamma}} := \|\tilde{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)}.$$

Dann ist $\gamma : X_1 \rightarrow X_{\Gamma}$ linear und stetig und es existiert ein linearer, stetiger Fortsetzungsoperator $R_1^0 : X_{\Gamma} \rightarrow X_1$.

Beweis:

Falls $X = H_0^1(\Omega)$, gilt $X_{\Gamma} = \{g \in H^{1/2}(\Gamma) | \tilde{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)\}$. Dieser Raum wird auch mit $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ bezeichnet [19, 20]. Wir können dann R_1^0 wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} R_1^0 : X_{\Gamma} &\rightarrow X_1, \\ g &\mapsto \tilde{R}_1^0 \tilde{g}. \end{aligned}$$

Falls X endlichdimensional, existiert eine Basis $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^{n_1}$ von X_1 . Nun sei $X_{\Gamma} = \text{span}\{\gamma\varphi^{(i)}\}_{i \in \mathcal{J}}$ mit $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n_1\}$ so, dass $\{\gamma\varphi^{(i)}\}_{i \in \mathcal{J}}$ linear unabhängig. Dann können wir R_1^0 wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} R_1^0 : X_{\Gamma} &\rightarrow X_1, \\ g = \sum_{i \in \mathcal{J}} v^{(i)} \gamma\varphi^{(i)} &\mapsto R_1^0 g = \sum_{i \in \mathcal{J}} v^{(i)} \varphi^{(i)}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.7:

In jedem Fall gilt $X_{\Gamma} \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$, aber $\|\cdot\|_{X_{\Gamma}} \neq \|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ [12, 20].

Wir formulieren nun das detaillierte unzerlegte Problem (2.2) als Zusammensetzung von Problemen auf den Teilgebieten. Da die Randwerte auf Γ a priori nicht bekannt sind, müssen die Lösungen $u_1(\mu) = u(\mu)|_{\Omega_1}$ und $u_2(\mu) = u(\mu)|_{\Omega_2}$ approximiert werden. Dies kann mit einem iterativen Schema erreicht werden. Wir wählen hier das Dirichlet-Neumann Schema [19, 20, 15]. Dazu werden folgende Linear- bzw. Bilinearformen für $k = 1, 2$ benötigt: $a_k : X_k \times X_k \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a_k(v, w; \mu) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_k} a_{ij}(\mu) \frac{\partial}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_i} w \, dx + \int_{\Omega_k} a_0(\mu) v w \, dx$$

und $f_k : X_k \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(v; \mu) = \int_{\Omega_k} h(\mu) v \, dx.$$

Folgende Aussage findet man zum Beispiel in [20].

Lemma 2.8 (Friedrich'sche Ungleichung):

Unter den Voraussetzungen aus Definition 2.4 existieren von Ω_k und Γ abhängige Konstanten, so dass für $v \in X_k$ gilt

$$\|v\|_{H^1(\Omega_k)} \leq c_{P,k} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

Lemma 2.9:

Unter den Voraussetzungen aus Definition 2.4 sind die Bilinearformen a_k , ($k = 1, 2$) stetig und koerziv auf X_k .

Definition 2.10:

Wir definieren die Stetigkeitskonstante von a_k , $k = 1, 2$ durch

$$\gamma_k(\mu) := \sup_{v \in X_k \setminus \{0\}} \sup_{w \in X_k \setminus \{0\}} \frac{a(v, w; \mu)}{\|v\|_{X_k} \|w\|_{X_k}}$$

und die Koerzitivitätskonstante durch

$$\alpha_k(\mu) := \inf_{v \in X_k \setminus \{0\}} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_{X_k} \|v\|_{X_k}}.$$

Mit Lemma 2.9 sind diese Quantitäten wohldefiniert.

Bemerkung 2.11:

Wegen $a_{ij}(\mu) = a_{ji}(\mu)$ für alle $i, j = 1, 2$, sind die Bilinearformen a_k symmetrisch. Wir können folgende Energienormen definieren:

$$\begin{aligned} v \in X_1 : \|v\|_{1,\mu}^2 &:= a_1(v, v; \mu), \\ v \in X_2 : \|v\|_{2,\mu}^2 &:= a_2(v, v; \mu). \end{aligned}$$

Die $\|\cdot\|_{1,\mu}$ -Norm ist äquivalent zur X_1 -Norm und die $\|\cdot\|_{2,\mu}$ -Norm ist äquivalent zur X_2 -Norm. Dies folgt aus Lemma 2.9.

Beweis (Lemma 2.9):

Die Stetigkeit folgt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Mit

$$c_{k,1}(\mu) := \max_{i,j \in \{1,2\}} \|a_{ij}(\mu)\|_{L^\infty(\Omega_k)} \quad \text{und} \quad c_{k,2}(\mu) := \|a_0(\mu)\|_{L^\infty(\Omega_k)}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_k(v, w; \mu)| &\leq c_{k,1}(\mu) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_k)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_k)} + c_{k,2}(\mu) \|v\|_{L^2(\Omega_k)} \|w\|_{L^2(\Omega_k)} \\ &\leq (c_{k,1}(\mu) + c_{k,2}(\mu)) \|v\|_{H^1(\Omega_k)} \|w\|_{H^1(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Die Koerzivität folgt aus Eigenschaft (2.1) und der Friedrich'schen Ungleichung:

$$a_k(v, v; \mu) \geq c_U(\mu) \int_{\Omega_k} |\nabla v|^2 dx \geq \frac{c_U(\mu)}{c_{P,k}^2} \|v\|_{H^1(\Omega_k)}^2.$$

□

Die Lösung des vollen unzerlegten Problems 2.2 besitzt folgende wichtige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} u(\mu)|_{\Omega_1} &= u(\mu)|_{\Omega_2} \quad \text{auf } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\mu) \frac{\partial u(\mu)|_{\Omega_1}}{\partial x_j} n_i^2 &= - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\mu) \frac{\partial u(\mu)|_{\Omega_2}}{\partial x_j} n_i^1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dabei ist $n^k = (n_1^k, n_2^k)$ für $k = 1, 2$ der Normalenvektor auf Γ in Richtung Ω_k . (2.3) ist der Konormalenfluss über das Interface. Das Dirichlet-Neumann Schema basiert auf der Annäherung dieser Interface-Bedingungen. Dabei wird zur Approximation des Konormalenflusses nicht die Lösung differenziert, sondern folgendes Funktional berechnet:

$$b(u(\mu)|_{\Omega_1}, v; \mu) := f_1(R_1 \gamma v; \mu) - a_1(u(\mu)|_{\Omega_1}, R_1 \gamma v; \mu), \quad \forall v \in X_2, \quad (2.4)$$

mit einem beliebigen Fortsetzungsoperator $R_1 : X_{\Gamma} \rightarrow X_1$. Falls $u(\mu)$ eine FE-Lösung ist, erhält man dadurch eine bessere Approximation an den Normalenfluss [7].

Definition 2.12 (Detailliertes iteratives Verfahren):

Seien $g^0(\mu) = 0 \in X_{\Gamma}$ und $\theta^n(\mu) \in [0, 1]$ für $n \geq 1$ gegeben. Das detaillierte iterative Verfahren sei gegeben durch

Zu $\mu \in \mathcal{P}$ suche Lösungssequenzen
 $u_1^n(\mu) \in X_1, u_2^n(\mu) \in X_2, n \geq 1$
mit

$$a_1(u_1^n(\mu), v; \mu) = f_1(v; \mu), \quad \forall v \in X_1^0, \quad (2.5)$$

$$\gamma u_1^n(\mu) = g^{n-1}(\mu), \quad (2.6)$$

$$a_2(u_2^n(\mu), v; \mu) = f_2(v; \mu) + b(u_1^n(\mu), v; \mu), \quad \forall v \in X_2, \quad (2.7)$$

$$g^n(\mu) = (1 - \theta^n(\mu)) g^{n-1}(\mu) + \theta^n(\mu) \gamma u_2^n(\mu). \quad (2.8)$$

Lemma 2.13 (Konvergenz):

Es gelte $\theta^n(\mu) \geq \theta_{\min}(\mu)$, $n \geq 1$ für ein $\theta_{\min}(\mu) > 0$. Dann existiert ein $\theta^*(\mu)$, so dass für $\theta^n(\mu) < \theta^*(\mu)$, $n \geq 1$ die Sequenzen der Lösungen $u_1^n(\mu)$, $u_2^n(\mu)$ in den jeweiligen Räumen konvergieren. Die Grenzwerte $u_1(\mu)$ und $u_2(\mu)$ ergeben zusammengesetzt gerade die Lösung des detaillierten unzerlegten Problems, d.h. $u_1(\mu) = u(\mu)|_{\Omega_1}$ und $u_2(\mu) = u(\mu)|_{\Omega_2}$.

Beweis:

siehe [15]. Insbesondere ist die Konvergenz-Geschwindigkeit bei der FE-Methode unabhängig von der Gitterweite. □

Kapitel 3

Reduziertes Problem

Wir realisieren nun das volle iterative Schema mit RB-Funktionen. Die Idee der RB-Methode ist es, die Mannigfaltigkeit der Lösungen $u(\mu)$, welche in einem Raum sehr hoher Dimension lebt, aber selbst nur die Dimension des Parameters μ besitzt, durch einen niedrigdimensionalen linearen Raum zu approximieren. Dazu werden sogenannte Snapshots (Lösungen zu einigen ausgewählten Parametern) berechnet und deren lineare Hülle als Approximationsraum für die Lösungs-Mannigfaltigkeit verwendet. Eine reduzierte Lösung $u_N(\mu)$ zu einem Parameter μ ist dann eine Projektion der Lösung $u(\mu)$ auf den Approximationsraum. In der Praxis werden die Snapshots zum Beispiel durch FE-Lösungen gegeben sein. In diesem Fall sind die Räume X , beziehungsweise X_1, X_2 als Finite-Element Räume zu interpretieren. Wir überspringen vorerst die Konstruktion der Basen und nehmen an, dass eine beliebige Auswahl an linear unabhängigen Snapshots aus X_1 und X_2 gegeben ist.

3.1 Definitionen

Definition 3.1 (RB-Räume I):

Auf Ω_1 bzw. Ω_2 seien mit o.B.d.A. linear unabhängigen Funktionen $\varphi_{N,1}^{(i)} \in X_1$ für $i = 1, \dots, N_1$ bzw. $\varphi_{N,2}^{(i)} \in X_2$ für $i = 1, \dots, N_2$ RB-Räume definiert durch

$$X_{N,1} := \text{span} \left\{ \varphi_{N,1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_1} \subset X_1,$$
$$X_{N,2} := \text{span} \left\{ \varphi_{N,2}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_2} \subset X_2.$$

Wir benötigen nun einen Teilraum $X_{N,1}^0$ von $X_{N,1}$, der im reduzierten Verfahren die Rolle von X_1^0 einnimmt. Wir könnten $X_{N,1}^0$ durch $X_{N,1} \cap H_0^1(\Omega_1)$ definieren. Wenn wir aber keine weitere Voraussetzung an die Basisfunktionen stellen, könnte $X_{N,1} \cap H_0^1(\Omega_1)$ leer sein. Deshalb wählen wir einen allgemeineren Ansatz.

Definition 3.2 (RB-Räume II):

Für $k = 1, 2$ definieren wir mit vorerst beliebigen, festen Indermengen $I_k^0 \subset \{1, \dots, N_k\}$ und $I_k^\Gamma = \{1, \dots, N_k\} \setminus I_k^0$:

$$X_{N,k}^0 := \text{span} \left\{ \varphi_{N,k}^{(i)} \mid i \in I_k^0 \right\} \subset X_{N,k},$$
$$X_{N,k}^\Gamma := \text{span} \left\{ \varphi_{N,k}^{(i)} \mid i \in I_k^\Gamma \right\} \subset X_{N,k}$$

und bezeichnen mit $N_k^0 := |I_k^0| = \dim(X_{N,k}^0)$ und $N_k^\Gamma := |I_k^\Gamma| = \dim(X_{N,k}^\Gamma)$.

Ein $v \in X_{N,k}$ kann also auf eindeutige Weise geschrieben werden als Summe $v = v^0 + v^\Gamma$ mit $v^0 \in X_{N,k}^0$ und $v^\Gamma \in X_{N,k}^\Gamma$. Der Raum $X_{N,2}^0$ ist für die Theorie nicht notwendig, wird hier aber der Vollständigkeit halber eingeführt.

Im Allgemeinen gilt nicht $\gamma(X_{N,1}^\Gamma) = \gamma(X_{N,2}^\Gamma)$, wir benötigen daher Lagrange-Multiplikatoren, welche den Übergang auf Γ regeln. Dieser Ansatz wurde schon im Zusammenhang mit der Mortar-FE-Methode, siehe z.B. [3], verfolgt. Bei der Wahl des Raums der Lagrange-Multiplikatoren ist zu beachten, dass er die selbe Dimension besitzt, wie $X_{N,\Gamma}^1$. Wir wählen hier speziell $X_{N,\Gamma}^1$ für die Lagrange-Multiplikatoren und erhalten damit die orthogonale Projektion.

Definition 3.3:

Wir definieren den Projektionsoperator $\pi_N : X_\Gamma \rightarrow \gamma(X_{N,1}^\Gamma)$ durch

$$\pi_N g : (g - \pi_N g, w)_{L^2(\Gamma)} = 0, \quad \forall w \in X_{N,\Gamma}^1.$$

Nun definieren wir für $k = 1, 2$ die Fortsetzungen $R_{N,k,\mu} : \gamma(X_{N,k}^\Gamma) \rightarrow X_{N,k}$ durch

$$R_{N,k,\mu} g : a_k(R_{N,k,\mu} g, v; \mu) = 0, \quad \forall v \in X_{N,k}^0, \quad (3.1)$$

$$\gamma(R_{N,k,\mu} g)^\Gamma = g. \quad (3.2)$$

Die Fortsetzungen sind wichtige Bestandteile des späteren Konvergenzbeweises. Die letzte Definition ist insbesondere nur sinnvoll, wenn wir eine erste Bedingung an die Basen stellen. Dies zeigt nachfolgendes Korollar.

Korollar 3.4:

Für $k = 1, 2$ gelte $\dim(\gamma(X_{N,k}^\Gamma)) = N_k^\Gamma$, d.h. $\gamma|_{X_{N,k}^\Gamma}$ ist bijektiv, dann sind die Fortsetzungen wohldefiniert.

Beweis:

Sei $g \in X_{N,\Gamma}^k$. Nach Voraussetzung ist $(R_{N,k,\mu} g)^\Gamma$ durch Gleichung (3.2) eindeutig bestimmt. Wir können dann Gleichung (3.1) umschreiben in

$$a_k((R_{N,k,\mu} g)^0, v; \mu) = -a_k((R_{N,k,\mu} g)^\Gamma, v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,k}^0.$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung $(R_{N,k,\mu} g)^0$. Also ist insgesamt auch $R_{N,k,\mu} g$ eindeutig. \square

Lemma 3.5:

Der Interpolationsoperator π_N ist linear und stetig, d.h. es existiert eine Konstante C , so dass

$$\|\pi_N g\|_{X_\Gamma} \leq C \|g\|_{X_\Gamma}, \quad \forall g \in X_\Gamma.$$

Beweis:

Wir beweisen die Stetigkeit. Zuerst zeigen wir eine Abschätzung in der $L^2(\Gamma)$ -Norm. Sei $g \in X_\Gamma$, dann ist $\pi_N g \in X_{N,\Gamma}^1$ und

$$\begin{aligned} \|\pi_N g\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= (\pi_N g, \pi_N g)_{L^2(\Gamma)} = (\pi_N g, g)_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\pi_N g\|_{L^2(\Gamma)} \|g\|_{L^2(\Gamma)} \\ \Rightarrow \|\pi_N g\|_{L^2(\Gamma)} &\leq \|g\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Im Raum $\gamma(X_{N,1}^\Gamma)$ sind alle Normen äquivalent. Also existiert eine Konstante C mit

$$\|g\|_{X_\Gamma} \leq C\|g\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall g \in \gamma(X_{N,1}^\Gamma).$$

Sei nun wieder $g \in X_\Gamma$, wir erhalten durch grobe Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\pi_N g\|_{X_\Gamma} &\leq C\|\pi_N g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|g\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C\|\tilde{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} = C\|g\|_{X_\Gamma}. \end{aligned}$$

□

Wir können unsere Schreibweise nun abkürzen, indem wir den Projektionsoperator auf eine lineare, stetige Abbildung von $X_{N,2}$ nach $X_{N,1}^\Gamma$ erweitern.

Definition 3.6:

Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Korollar 3.4. Wir definieren den Operator $\tilde{\pi}_N$ durch

$$\tilde{\pi}_N := \left(\gamma|_{X_{N,1}^\Gamma}\right)^{-1} \pi_N \gamma : X_{N,2} \rightarrow X_{N,1}^\Gamma.$$

Außerdem definieren wir erweiterte harmonische Fortsetzungen durch

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{N,1,\mu} &:= R_{N,1,\mu} \pi_N \gamma : X_{N,2} \rightarrow X_{N,1}, \\ \tilde{R}_{N,2,\mu} &:= R_{N,2,\mu} \gamma : X_{N,2} \rightarrow X_{N,2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Kopplung auf Γ bewerkstelligt. Wir müssen nun weitere Eigenschaften, die später gebraucht werden, gewährleisten. Wir verlangen, dass π_N auf $\gamma(X_{N,2})$ eine Bijektion ist, d.h. es soll gelten

$$\pi_N g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0, \quad \forall g \in \gamma(X_{N,2}).$$

Dies ist gegeben, falls $\gamma(X_{N,2}) \cap \gamma(X_{N,1}^\Gamma)^\perp = 0$. Außerdem soll gelten, dass aus $v \in X_{N,2}^0$ folgt $\tilde{R}_{N,1,\mu} v \in X_{N,1}^0$. Dies ist nach Definition von $R_{N,1,\mu}$ nur möglich, falls $\pi_N \gamma v = 0$ und das ist mit voriger Eigenschaft wiederum nur möglich, falls $\gamma v = 0$. Wir fassen nun die Bedingungen an die RB-Räume zusammen.

Bedingungen 3.7:

- I $\dim(\gamma(X_{N,1}^\Gamma)) = N_1^\Gamma,$
- II $\dim(\gamma(X_{N,2}^\Gamma)) = N_2^\Gamma,$
- III $X_{N,\Gamma}^2 \cap \gamma(X_{N,1}^\Gamma)^\perp = 0,$
- IV $\gamma(X_{N,2}^0) = 0.$

Wir haben somit einige Eigenschaften von FE-Räumen nachgeahmt. Wie und ob diese realisiert werden können, ist eine Frage der Basisgenerierung (Abschnitt 6.5).

3.2 Problemformulierung

Wir erhalten ein Funktional $b_N : X_{N,1} \times X_{N,2} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ analog zu b aus (2.4) indem wir setzen

$$b_N(v, w; \mu) := f_1(\tilde{\pi}_N w; \mu) - a_1(v, \tilde{\pi}_N w; \mu).$$

Definition 3.8 (Reduziertes iteratives Verfahren):

Seien $g_N^0(\mu) = 0 \in X_{N,2}$ und $\theta_N^n(\mu) \in [0, 1]$ für $n \geq 1$ gegeben. Das reduzierte iterative Verfahren sei gegeben durch

Zu $\mu \in \mathcal{P}$ suche Lösungssequenzen
 $u_{N,1}^n(\mu) \in X_{N,1}, u_{N,2}^n(\mu) \in X_{N,2}, n \geq 1$
mit

$$a_1(u_{N,1}^n(\mu), v; \mu) = f_1(v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,1}^0, \quad (3.3)$$

$$u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma = \tilde{\pi}_N g_N^{n-1}(\mu), \quad (3.4)$$

$$a_2(u_{N,2}^n(\mu), v; \mu) = f_2(v; \mu) + b_N(u_{N,1}^n(\mu), v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,2}, \quad (3.5)$$

$$g_N^n(\mu) = (1 - \theta_N^n(\mu)) g_N^{n-1}(\mu) + \theta_N^n(\mu) u_{N,2}^n(\mu). \quad (3.6)$$

Bemerkung 3.9:

Mögliche Abbruchkriterien für das Verfahren sind $n = n_{\text{stop}}$ mit einem $n_{\text{stop}} \geq 1$ oder

$$\|u_{N,1}^n(\mu) - u_{N,1}^{n-1}(\mu)\|_{1,\mu} + \|u_{N,2}^n(\mu) - u_{N,2}^{n-1}(\mu)\|_{2,\mu} \leq \text{tol}$$

mit einer Toleranzschranke $\text{tol} > 0$. Wir überprüfen kurz, ob alle Iterierten existieren und eindeutig sind. Für $u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma$ ist dies mit Gleichung (3.4) klar. Wenn wir Gleichung (3.3) umschreiben in

$$a_1(u_{N,1}^n(\mu)^0, v; \mu) = f_1(v; \mu) - a_1(u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma, v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,1}^0, \quad (3.7)$$

folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $u_{N,1}^n(\mu)^0$ aus dem Satz von Lax-Milgram, da die rechte Seite in (3.7) linear und stetig in v ist. Die Wohldefiniertheit in Gleichung (3.5) folgt ebenso aus dem Satz von Lax-Milgram. Hierbei ist die Stetigkeit von $b_N(v, \cdot; \mu)$ und damit die Stetigkeit der Funktion $\tilde{\pi}_N$ auf $X_{N,2}$ wichtig. Für diese brauchten wir die Bedingung IV aus 3.7.

3.3 Beschränktheit der Normen

Satz 3.10:

Für $n \geq 1$ ist die X_2 -Norm von $g_N^n(\mu)$ beschränkt durch

$$\|g_N^n(\mu)\|_{X_2} \leq c_f(\mu) \sum_{i=1}^n \theta_N^i(\mu) \prod_{j=i+1}^n c_\theta(j, \mu),$$

mit Konstanten ($j \geq 1$)

$$c_f(\mu) := \frac{1}{\alpha_2(\mu)} \left(\|f_2(\cdot; \mu)\|_{X_2'} + \left(1 + \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)} \right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} \right),$$

$$c_\theta(j, \mu) := (1 - \theta_N^j(\mu)) + \theta_N^j(\mu) \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_2(\mu)} \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}} \right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)}^2.$$

Beweis:

Sei $n \geq 1$ fest. Wir schätzen zuerst $u_{N,1}^n(\mu)$ in der X_1 -Norm ab:

$$\|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} \leq \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{X_1} + \|u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma\|_{X_1}.$$

Die Norm von $u_{N,1}^n(\mu)^0$ schätzen wir über die Energienorm ab:

$$\|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{X_1} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(\mu)}} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu}. \quad (3.8)$$

Wir folgern dazu aus (3.3), der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu}^2 &= a_1(u_{N,1}^n(\mu)^0, u_{N,1}^n(\mu)^0; \mu) \\ &= f_1(u_{N,1}^n(\mu)^0; \mu) - a_1(u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma, u_{N,1}^n(\mu)^0; \mu) \\ &\leq \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{X_1} + \|u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma\|_{1,\mu} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu}. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Koerzivität und die Stetigkeit von a_1 an:

$$\begin{aligned} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu}^2 &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(\mu)}} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu} \\ &\quad + \sqrt{\gamma_1(\mu)} \|u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma\|_{X_1} \|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{1,\mu}. \end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir eine Abschätzung in der Energienorm und zusammen mit (3.8) ergibt sich

$$\|u_{N,1}^n(\mu)^0\|_{X_1} \leq \frac{1}{\alpha_1(\mu)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}} \|u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma\|_{X_1}.$$

Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} &\leq \frac{1}{\alpha_1(\mu)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} + \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}}\right) \|u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma\|_{X_1} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1(\mu)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} + \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}}\right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \|g_N^{n-1}(\mu)\|_{X_2}. \end{aligned}$$

Nun schätzen wir $u_{N,2}^n(\mu)$ in der X_2 -Norm ab. Wir betrachten zuerst die Energienorm und benutzen Gleichung (3.5):

$$\begin{aligned} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{2,\mu}^2 &= a_2(u_{N,2}^n(\mu), u_{N,2}^n(\mu); \mu) \\ &= f_2(u_{N,2}^n(\mu); \mu) + b_N(u_{N,2}^n(\mu), u_{N,2}^n(\mu); \mu) \\ &= f_2(u_{N,2}^n(\mu); \mu) + f_1(\tilde{\pi}_N u_{N,2}^n(\mu); \mu) - a_1(u_{N,1}^n(\mu), \tilde{\pi}_N u_{N,2}^n(\mu); \mu) \\ &\leq \|f_2(\cdot; \mu)\|_{X_2'} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} + \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} \\ &\quad + \gamma_1(\mu) \|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2}. \end{aligned}$$

Nun folgern wir mit der Koerzivität von a_2

$$\begin{aligned} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{2,\mu}^2 &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_2(\mu)}} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{2,\mu} \left(\|f_2(\cdot; \mu)\|_{X_2'} \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \left(\|f_1(\cdot; \mu)\|_{X_1'} + \gamma_1(\mu) \|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Nach Kürzen von $\|u_{N,2}^n(\mu)\|_{2,\mu}$ und nochmaligem Ausnutzen der Koerzivität erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} &\leq \frac{1}{\alpha_2(\mu)} \left(\|f_2(\cdot; \mu)\|_{X'_2} \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \left(\|f_1(\cdot; \mu)\|_{X'_1} + \gamma_1(\mu) \|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir können jetzt die X_2 -Norm von $g_N^n(\mu)$ durch einen Ausdruck abschätzen, der nur aus Konstanten und der X_2 -Norm von $g_N^{n-1}(\mu)$ besteht. Wir wenden in (3.6) die Dreiecksungleichung an und setzen dann die beiden bisher gewonnenen Abschätzungen ein.

$$\begin{aligned} \|g_N^n(\mu)\|_{X_2} &\leq (1 - \theta_N^n(\mu)) \|g_N^{n-1}\|_{X_2} + \theta_N^n(\mu) \|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} \\ &\leq \left[(1 - \theta_N^n(\mu)) + \theta_N^n(\mu) \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_2(\mu)} \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}} \right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)}^2 \right] \|g_N^{n-1}\|_{X_2} \\ &\quad + \theta_N^n(\mu) \left[\frac{1}{\alpha_2(\mu)} \left(\|f_2(\cdot; \mu)\|_{X'_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 + \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)} \right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X'_1} \right) \right] \\ &= c_\theta(n, \mu) \|g_N^{n-1}\|_{X_2} + c_f(\mu) \theta_N^n(\mu). \end{aligned}$$

Die endgültige Abschätzung folgt nun mit vollständiger Induktion und $g_N^0 = 0$. \square

Korollar 3.11:

Für $n \geq 1$ ist die X_1 -Norm von $u_{N,1}^n(\mu)$ beschränkt durch

$$\begin{aligned} \|u_{N,1}^n(\mu)\|_{X_1} &\leq \frac{1}{\alpha_1(\mu)} \|f_1(\cdot; \mu)\|_{X'_1} \\ &\quad + \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}} \right) \|\tilde{\pi}_N\|_{\mathcal{L}(X_{N,2}, X_{N,1}^\Gamma)} c_f(\mu) \sum_{i=1}^n \theta_N^i(\mu) \prod_{j=i+1}^n c_\theta(j, \mu) \end{aligned}$$

und die X_2 -Norm von $u_{N,2}^n(\mu)$ durch

$$\|u_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} \leq \frac{1}{\alpha_2(\mu)} \|f_2(\cdot; \mu)\|_{X'_2} + c_\theta(0, \mu) c_f(\mu) \sum_{i=1}^n \theta_N^i(\mu) \prod_{j=i+1}^n c_\theta(j, \mu),$$

wobei $\theta_N^0 := 1$.

Beweis:

Siehe Beweis von Satz 3.10. \square

3.4 Matrix/Vektor-Formen

Wir schreiben nun (3.3), (3.4) und (3.5) um in lineare Gleichungssysteme. Wir legen zuerst einige Schreibweisen fest. Es seien

$$\begin{aligned} g_N^{n-1}(\mu) &= \sum_{i \in I_2^\Gamma} \underline{g}_N^{n-1(i)}(\mu) \varphi_{N,2}^{(i)}, \\ u_{N,k}^n(\mu) &= \sum_{i=1}^{N_k} \underline{u}_{N,k}^n(i)(\mu) \varphi_{N,k}^{(i)}, \end{aligned}$$

für $k = 1, 2$ mit Vektoren $\underline{g}_N^{n-1}(\mu) \in \mathbb{R}^{N_2^\Gamma}$, $\underline{u}_{N,k}^n(\mu) \in \mathbb{R}^{N_k}$. Die Indexmengen I_k^0 und I_k^Γ seien nun geordnet. Allgemein sei dann für einen Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^{N_k}$ für $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}\underline{v}^0 &:= \left(\underline{v}^{(i)} \right)_{i \in I_k^0} \in \mathbb{R}^{N_k^0}, \\ \underline{v}^\Gamma &:= \left(\underline{v}^{(i)} \right)_{i \in I_k^\Gamma} \in \mathbb{R}^{N_k^\Gamma}.\end{aligned}$$

Wir beginnen das Umschreiben mit Gleichung (3.4):

$$\blacktriangleright \quad \underline{G}_{N,11} \underline{u}_{N,1}^n(\mu)^\Gamma = \underline{G}_{N,12} \underline{g}_N^{n-1}(\mu),$$

wobei die Matrizen $\underline{G}_{N,11} \in \mathbb{R}^{N_1^\Gamma \times N_1^\Gamma}$ und $\underline{G}_{N,12} \in \mathbb{R}^{N_1^\Gamma \times N_2^\Gamma}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\underline{G}_{N,11} &= \left((\gamma\varphi_{N,1}^{(j)}, \gamma\varphi_{N,1}^{(i)})_{L^2(\Gamma)} \right)_{i,j \in I_1^\Gamma}, \\ \underline{G}_{N,12} &= \left((\gamma\varphi_{N,2}^{(j)}, \gamma\varphi_{N,1}^{(i)})_{L^2(\Gamma)} \right)_{i \in I_1^\Gamma, j \in I_2^\Gamma}.\end{aligned}$$

Die Abbildung $\tilde{\pi}_N$ ist also durch die Matrix $\underline{G}_{N,11}^{-1} \underline{G}_{N,12}$ charakterisiert. Die Matrix $\underline{G}_{N,11}$ ist nicht-singulär, da die Funktionen $\gamma\varphi_{N,1}^{(i)}$ für $i \in I_1^\Gamma$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind. Gleichung (3.3) lässt sich äquivalent schreiben als

$$\blacktriangleright \quad \underline{A}_{N,1}^{00}(\mu) \underline{u}_{N,1}^n(\mu)^0 = \underline{F}_{N,1}^0(\mu) - \underline{A}_{N,1}^{0\Gamma}(\mu) \underline{u}_{N,1}^n(\mu)^\Gamma,$$

wobei die Matrizen $\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu) \in \mathbb{R}^{N_1^0 \times N_1^0}$ und $\underline{A}_{N,1}^{0\Gamma}(\mu) \in \mathbb{R}^{N_1^0 \times N_1^\Gamma}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu) &= \left(a_1(\varphi_{N,1}^{(j)}, \varphi_{N,1}^{(i)}; \mu) \right)_{i,j \in I_1^0}, \\ \underline{A}_{N,1}^{0\Gamma}(\mu) &= \left(a_1(\varphi_{N,1}^{(j)}, \varphi_{N,1}^{(i)}; \mu) \right)_{i \in I_1^0, j \in I_1^\Gamma},\end{aligned}$$

und der Vektor $\underline{F}_{N,1}^0(\mu) \in \mathbb{R}^{N_1^0}$ durch

$$\underline{F}_{N,1}^0(\mu) = \left(f_1(\varphi_{N,1}^{(i)}; \mu) \right)_{i \in I_1^0}.$$

Zuletzt wollen wir Gleichung (3.5) in Matrizen/Vektoren ausdrücken:

$$\blacktriangleright \quad \underline{A}_{N,2}(\mu) \underline{u}_{N,2}^n(\mu) = \underline{F}_{N,2}(\mu) + \underline{B}_{N,2}^n(\mu),$$

mit der Matrix $\underline{A}_{N,2}(\mu) \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$,

$$\underline{A}_{N,2}(\mu) = \left(a_2(\varphi_{N,2}^{(j)}, \varphi_{N,2}^{(i)}; \mu) \right)_{i,j=1}^{N_2}$$

und den Vektoren $\underline{F}_{N,2}(\mu) \in \mathbb{R}^{N_2}$, $\underline{B}_{N,2}^n(\mu) \in \mathbb{R}^{N_2}$,

$$\begin{aligned}\underline{F}_{N,2}(\mu) &= \left(f_2(\varphi_{N,2}^{(i)}; \mu) \right)_{i=1}^{N_2}, \\ \underline{B}_{N,2}^n(\mu)^{(i)} &= \begin{cases} 0, & i \in I_2^0, \\ \underline{B}_{N,1}^n(\mu)^{(i)}, & i \in I_2^\Gamma. \end{cases}\end{aligned}$$

Der Vektor $\underline{B}_{N,1}^n(\mu) \in \mathbb{R}^{N_2^\Gamma}$ ist gegeben durch

$$\underline{B}_{N,1}^n(\mu) = (\underline{G}_{N,11}^{-1} \underline{G}_{N,12})^T \left(\underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu) - \underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu) \underline{u}_{N,1}^n(\mu) \right)$$

mit der Matrix $\underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu) \in \mathbb{R}^{N_1^\Gamma \times N_1}$ und dem Vektor $\underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu) \in \mathbb{R}^{N_1^\Gamma}$,

$$\begin{aligned} \underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu) &= \left(a_1(\varphi_{N,1}^{(j)}, \varphi_{N,1}^{(i)}; \mu) \right)_{i \in I_1^\Gamma, j \in \{1, \dots, N_1\}}, \\ \underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu) &= \left(f_1(\varphi_{N,1}^{(i)}; \mu) \right)_{i \in I_1^\Gamma}. \end{aligned}$$

Nun geben wir noch die für das Abbruch-Kriterium, siehe Bemerkung 3.9, benötigten Matrizen bzw. Vektoren an. Es gilt für $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|u_{N,k}^n(\mu) - u_{N,k}^{n-1}(\mu)\|_{k,\mu}^2 &= a_k \left(u_{N,k}^n(\mu) - u_{N,k}^{n-1}(\mu), u_{N,k}^n(\mu) - u_{N,k}^{n-1}(\mu); \mu \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_k} \left(\underline{u}_{N,k}^n{}^{(i)}(\mu) - \underline{u}_{N,k}^{n-1}{}^{(i)}(\mu) \right) \left(\underline{u}_{N,k}^n{}^{(j)}(\mu) - \underline{u}_{N,k}^{n-1}{}^{(j)}(\mu) \right) a_k \left(\varphi_{N,k}^{(i)}, \varphi_{N,k}^{(j)}; \mu \right) \\ &= \left(\underline{u}_{N,k}^n(\mu) - \underline{u}_{N,k}^{n-1}(\mu) \right)^T \underline{A}_{N,k} \left(\underline{u}_{N,k}^n(\mu) - \underline{u}_{N,k}^{n-1}(\mu) \right) \end{aligned}$$

mit der bereits definierten Matrix $\underline{A}_{N,2}$ und der Matrix $\underline{A}_{N,1} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, die gegeben ist durch

$$\underline{A}_{N,1} = \left(a_1 \left(\varphi_{N,1}^{(i)}, \varphi_{N,1}^{(j)}; \mu \right) \right)_{i,j=1}^{N_1}.$$

Bemerkung 3.12:

Die drei Matrizen $\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)$, $\underline{A}_{N,1}^{0\Gamma}(\mu)$ und $\underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu)$ bilden zusammengesetzt die Matrix

$$\underline{A}_{N,1}(\mu) = \left(a_1 \left(\varphi_{N,1}^{(j)}, \varphi_{N,1}^{(i)}; \mu \right) \right)_{i,j=1}^{N_1}$$

und die Vektoren $\underline{F}_{N,1}^0(\mu)$ und $\underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu)$ bilden zusammengesetzt

$$\underline{F}_{N,1}(\mu) = \left(f_1 \left(\varphi_{N,1}^{(i)}; \mu \right) \right)_{i=1}^{N_1}.$$

Insgesamt müssen also folgende Matrizen und Vektoren assembliert werden: $\underline{A}_{N,k}(\mu)$, $\underline{F}_{N,k}(\mu)$ für $k = 1, 2$ und $\underline{G}_{N,11}$, $\underline{G}_{N,12}$.

Bei der Standard-RB-Methode lässt sich unter Orthogonalitätsbedingungen eine obere Schranke für die Kondition der Systemmatrix angeben [17]. Wir wenden dieses Resultat in folgendem Lemma mit analogem Beweis auf unsere Matrizen an.

Lemma 3.13 (Konditionen):

Die Basen der RB-Räume seien folgendermaßen gegeben: $\{\varphi_{N,2}^{(i)}\}_{i=1}^{N_2}$ sei orthonormal bezüglich $(\cdot, \cdot)_{X_2}$, $\{\varphi_{N,1}^{(i)}\}_{i \in I_1^0}$ sei orthonormal bezüglich $(\cdot, \cdot)_{X_1}$ und $\{\gamma \varphi_{N,1}^{(i)}\}_{i \in I_1^\Gamma}$ sei orthonormal bezüglich $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa(\underline{G}_{N,11}) &= 1, \\ \kappa(\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)) &\leq \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}, \\ \kappa(\underline{A}_{N,2}(\mu)) &\leq \frac{\gamma_2(\mu)}{\alpha_2(\mu)}, \end{aligned}$$

mit den Stetigkeits- bzw. Koerzivitätskonstanten $\gamma_1(\mu)$, $\gamma_2(\mu)$ bzw. $\alpha_1(\mu)$, $\alpha_2(\mu)$ von a_1 bzw. a_2 .

Beweis:

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\underline{G}_{N,1,1}$ die Einheitsmatrix, hat also die Kondition 1. Die Matrix $\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)$ ist symmetrisch, da a_1 symmetrisch ist. Deshalb gilt

$$\kappa(\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|},$$

wobei λ_{max} bzw. λ_{min} der betragsmäßig größte bzw. kleinste Eigenwert von $\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)$ ist. Seien $\underline{u}_{max}, \underline{u}_{min}$ die zugehörigen Eigenvektoren und u_{max}, u_{min} zugehörige Funktionen in $X_{N,1}^0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{max} \underline{u}_{max}^T \underline{u}_{max} &= \underline{u}_{max}^T \underline{A}_{N,1}^{00}(\mu) \underline{u}_{max} \\ &= a_1(u_{max}, u_{max}; \mu) \\ &\leq \gamma_1(\mu) \|u_{max}\|_{X_1}^2. \end{aligned}$$

Mit der Orthonormalität in $X_{N,1}^0$ folgt

$$\begin{aligned} \|u_{max}\|_{X_1}^2 &= \left(\sum_{i \in I_1^0} \underline{u}_{max}^{(i)} \varphi_{N,1}^{(i)}, \sum_{i \in I_1^0} \underline{u}_{max}^{(i)} \varphi_{N,1}^{(i)} \right)_{X_1} \\ &= \sum_{i,j \in I_1^0} \underline{u}_{max}^{(i)} \underline{u}_{max}^{(j)} \left(\varphi_{N,1}^{(i)}, \varphi_{N,1}^{(j)} \right)_{X_1} \\ &= \sum_{i \in I_1^0} \left(\underline{u}_{max}^{(i)} \right)^2 = \underline{u}_{max}^T \underline{u}_{max}, \end{aligned}$$

also insgesamt $\lambda_{max} \leq \gamma_1(\mu)$. Ebenso zeigt man, dass $\lambda_{min} \geq \alpha_1(\mu)$. Also folgt

$$\kappa(\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} \leq \frac{\gamma_1(\mu)}{\alpha_1(\mu)}.$$

Die Schranke für die Kondition der Matrix $\underline{A}_{N,2}(\mu)$ erhält man analog. □

Kapitel 4

Analyse des Verfahrens

Dass das Verfahren unter den gestellten Bedingungen wohldefiniert ist, haben wir bereits gesehen. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass es sich tatsächlich dazu eignet, die Lösung $u(\mu)$ des detaillierten unzerlegten Problems 2.2 zu approximieren. Dazu beweisen wir zum einen die Reproduktion von Lösungen aus dem detaillierten iterativen Schema, falls die RB-Räume „schön“ sind. Zum anderen zeigen wir die Konvergenz des Verfahrens und stellen einen Bezug zwischen den Grenzwerten und der Lösung $u(\mu)$ her.

4.1 Vorbereitungen und erste Resultate

Definition 4.1 (RB-Räume III):

Passend zu den obigen Definitionen definieren wir einen RB-Raum auf ganz Ω :

$$X_N := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid v_k := v|_{\Omega_k} \in X_{N,k}, \right. \\ \left. v_1^\Gamma = \tilde{\pi}_N v_2 \right\}.$$

Folgendes theoretisches Resultat stellt einen Bezug zwischen dem detaillierten iterativen Schema und dem reduzierten iterativen Schema her.

Satz 4.2 (Reproduktion der Iterierten):

Falls $X_N \subset X$, die Iterierten aus dem detaillierten iterativen Verfahren in den RB-Räumen enthalten sind, d.h. $u_1^n(\mu) \in X_{N,1}$, $u_2^n(\mu) \in X_{N,2}$ für $\mu \in \mathcal{P}$, $n = 1, \dots, n_{\max}$ und $\theta_N^n(\mu) = \theta^n(\mu)$ für $n < n_{\max}$, gilt

$$u_{N,1}^n(\mu) = u_1^n(\mu), \quad \forall n \in \{1, \dots, n_{\max}\}, \\ u_{N,2}^n(\mu) = u_2^n(\mu), \quad \forall n \in \{1, \dots, n_{\max}\},$$

wobei $u_{N,1}^n(\mu)$ bzw. $u_{N,2}^n(\mu)$ die Iterierten aus dem reduzierten iterativen Verfahren sind.

Beweis:

Sei $n \in \{1, \dots, n_{\max}\}$. Wir zeigen, dass aus $\gamma g_N^{n-1}(\mu) = g^{n-1}(\mu)$ folgt $u_{N,1}^n(\mu) = u_1^n(\mu)$, $u_{N,2}^n(\mu) = u_2^n(\mu)$ und auch $\gamma g_N^n(\mu) = g^n(\mu)$, falls $n < n_{\max}$. Die Behauptung folgt dann mit vollständiger Induktion wegen $\gamma g_N^0(\mu) = 0 = g^0(\mu)$.

Es gelte also $\gamma g_N^{n-1}(\mu) = g^{n-1}(\mu)$. $X_N \subset X$ kann nur gelten, wenn zusätzlich zu den Bedingungen 3.7 gilt $X_{N,1}^0 \subset X_1^0$ und $\gamma(X_{N,1}^\Gamma) = \gamma(X_{N,2}^\Gamma)$, also π_N die Identität ist. Mit Gleichung (2.6) und (3.4) folgt

$$\gamma u_1^n(\mu)^\Gamma = \gamma u_1^n(\mu) = g^{n-1}(\mu) = \gamma g_N^{n-1}(\mu) \\ = (\pi_N)^{-1} \gamma u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma = \gamma u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma.$$

Mit Punkt I der Bedingungen 3.7 folgt

$$u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma = u_1^n(\mu)^\Gamma.$$

Aus den Gleichungen (2.5), (3.3) folgt dann für alle $v \in X_{N,1}^0$

$$\begin{aligned} a_1(u_{N,1}^n(\mu)^0 - u_1^n(\mu)^0, v; \mu) &= -a_1(u_{N,1}^n(\mu)^\Gamma - u_1^n(\mu)^\Gamma, v; \mu) = 0 \\ &\Rightarrow u_{N,1}^n(\mu)^0 = u_1^n(\mu)^0 \\ &\Rightarrow u_{N,1}^n(\mu) = u_1^n(\mu). \end{aligned}$$

Jetzt folgern wir mit den Gleichungen (2.7), (3.5) für alle $v \in X_{N,2}$

$$\begin{aligned} a_2(u_{N,2}^n(\mu) - u_2^n(\mu), v; \mu) &= f_1(\tilde{\pi}_N v - R_1 \gamma v; \mu) \\ &\quad - a_1(u_1^n(\mu), \tilde{\pi}_N v - R_1 \gamma v; \mu). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wegen der Konformität von X_N gilt $\gamma(\tilde{\pi}_N v) = \gamma v$ und damit $(\tilde{\pi}_N v - R_1 \gamma v) \in X_1^0$. Da $u_1^n(\mu)$ Gleichung (2.5) erfüllt, ergibt (4.1) Null, woraus letztendlich $u_{N,2}^n(\mu) = u_2^n(\mu)$ folgt. Der Rest folgt dann direkt aus den Gleichungen (2.8), (3.6) und aus $\theta_N^n(\mu) = \theta^n(\mu)$ für $n < n_{max}$. \square

A priori können wir nicht $X_N \subset X$ erwarten. X_N ist jedoch in einem größeren Raum enthalten, den wir im Folgenden einführen.

Definition 4.3:

Der Raum \hat{X} sei definiert durch

$$\hat{X} := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{\Omega_1} \in X_1, v|_{\Omega_2} \in X_2\}.$$

Auf \hat{X} sei durch $\|v\|_{\hat{X}} := (\|v_1\|_{X_1}^2 + \|v_2\|_{X_2}^2)^{1/2}$ eine Norm gegeben. Die Bilinearform a und die Linearform f werden auf \hat{X} erweitert durch

$$\begin{aligned} a(v, w; \mu) &:= a_1(v_1, w_1; \mu) + a_2(v_2, w_2; \mu), \\ f(v; \mu) &:= f_1(v_1; \mu) + f_2(v_2; \mu). \end{aligned}$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\mu) &:= \sup_{v \in \hat{X} \setminus \{0\}} \sup_{w \in \hat{X} \setminus \{0\}} \frac{a(v, w; \mu)}{\|v\|_{\hat{X}} \|w\|_{\hat{X}}}, \\ \hat{\alpha}(\mu) &:= \inf_{v \in \hat{X} \setminus \{0\}} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_{\hat{X}} \|v\|_{\hat{X}}} \end{aligned}$$

und die Energienorm auf \hat{X} durch

$$\|v\|_\mu := \sqrt{a(v, v; \mu)}.$$

Für $v \in X$ gilt $\|v\|_{\hat{X}} = \|v\|_X$. Dass $\hat{\gamma}(\mu)$, $\hat{\alpha}(\mu)$ und die Energienorm wohldefiniert sind, zeigen folgende Abschätzungen zur Stetigkeit und Koerzivität von a :

$$\begin{aligned} a(u, v; \mu) &= a_1(u_1, v_1; \mu) + a_2(u_2, v_2; \mu) \\ &\leq \gamma_1(\mu) \|u_1\|_{X_1} \|v_1\|_{X_1} + \gamma_2(\mu) \|u_2\|_{X_2} \|v_2\|_{X_2} \\ &\leq 2 \max\{\gamma_1(\mu), \gamma_2(\mu)\} \sqrt{\|u_1\|_{X_1}^2 \|v_1\|_{X_1}^2 + \|u_2\|_{X_2}^2 \|v_2\|_{X_2}^2} \\ &\leq 2 \max\{\gamma_1(\mu), \gamma_2(\mu)\} \|u\|_{\hat{X}} \|v\|_{\hat{X}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(u, u; \mu) &= a(u_1, u_1; \mu) + a(u_2, u_2; \mu) \\
&\geq \alpha_1(\mu) \|u_1\|_{X_1}^2 + \alpha_2(\mu) \|u_2\|_{X_2}^2 \\
&\geq \min\{\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu)\} (\|u_1\|_{X_1}^2 + \|u_2\|_{X_2}^2) \\
&= \min\{\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu)\} \|u\|_X^2.
\end{aligned}$$

Wir können nun das detaillierte unzerlegte Problem in reduzierter Form angeben. Wir werden später zeigen, dass die Lösung dieses Problems genau der Zusammensetzung der Grenzwerte der Iterierten $u_{N,1}^n(\mu)$, $u_{N,2}^n(\mu)$ des reduzierten iterativen Verfahrens entspricht.

Definition 4.4 (Reduziertes unzerlegtes Problem):

Das reduzierte unzerlegte Problem ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\text{Zu } \mu \in \mathcal{P} \text{ suche } u_N(\mu) \in X_N \text{ mit} \\
&a(u_N(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \quad \forall v \in X_N. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Im Beweis der Konvergenz des reduzierten iterativen Verfahrens machen wir von folgender Äquivalenz Gebrauch.

Lemma 4.5:

$u_N(\mu) \in X_N$ ist die Lösung des reduzierten unzerlegten Problems genau dann, wenn für $u_{N,1}(\mu) = u_N(\mu)|_{\Omega_1}$ und $u_{N,2}(\mu) = u_N(\mu)|_{\Omega_2}$ gilt

$$a_1(u_{N,1}(\mu), v; \mu) = f_1(v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,1}^0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
a_2(u_{N,2}(\mu), v; \mu) &= f_2(v; \mu) + f_1(\tilde{\pi}_N v; \mu) \\
&\quad - a_1(u_{N,1}(\mu), \tilde{\pi}_N v; \mu), \quad \forall v \in X_{N,2}. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Der Beweis von Lemma 4.5 verläuft analog zum Beweis von (2.1) in [15].

Beweis:

Für die erste Richtung sei $u_N(\mu)$ Lösung des reduzierten unzerlegten Problems. Sei $v \in X_{N,1}^0$ und \hat{v} die Fortsetzung von v auf Ω_2 durch die Nullfunktion ($\hat{v} \in X_N!$). Es gilt

$$a_1(u_{N,1}(\mu), v; \mu) = a(u_N(\mu), \hat{v}; \mu) = f(\hat{v}, \mu) = f_1(v; \mu).$$

Nun sei $v \in X_{N,2}$ und $\hat{v} \in X_N$ die Fortsetzung von v auf Ω_1 durch $\tilde{\pi}_N v$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_2(u_{N,2}(\mu), v; \mu) &= a(u_N(\mu), \hat{v}; \mu) - a_1(u_{N,1}(\mu), \tilde{\pi}_N v; \mu) \\
&= f(\hat{v}; \mu) - a_1(u_{N,1}(\mu), \tilde{\pi}_N v; \mu) \\
&= f_2(v; \mu) + f_1(\tilde{\pi}_N v; \mu) - a_1(u_{N,1}(\mu), \tilde{\pi}_N v; \mu).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die andere Richtung, d.h. $u_N(\mu) \in X_N$ sei nun durch die Bedingungen (4.3) und (4.4) gegeben. Für $v \in X_N$ gilt

$$\begin{aligned}
a(u_N(\mu), v; \mu) &= a_1(u_{N,1}(\mu), v_1; \mu) + a_2(u_{N,2}(\mu), v_2; \mu) \\
&= a_1(u_{N,1}(\mu), v_1 - \tilde{\pi}_N v_2; \mu) + a_1(u_{N,1}(\mu), \tilde{\pi}_N v_2; \mu) \\
&\quad + a_2(u_{N,2}(\mu), v_2; \mu).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir Voraussetzung (4.4) einsetzen und da $v_1 - \tilde{\pi}_N v_2 \in X_{N,1}^0$ auch Voraussetzung (4.3). Dann bleibt nur noch stehen

$$\begin{aligned}
a_N(u_N(\mu), v; \mu) &= f_1(v_1 - \tilde{\pi}_N v_2; \mu) + f_2(v_2; \mu) + f_1(\tilde{\pi}_N v_2; \mu) \\
&= f(v; \mu).
\end{aligned}$$

□

4.2 Konvergenz

Der Beweis der Konvergenz des reduzierten iterativen Verfahrens erfolgt nun in 2 Schritten. Wir zeigen zuerst, dass die Folgen der Iterierten $u_{N,1}^n(\mu)$ und $u_{N,2}^n(\mu)$ konvergieren, falls die Folge der $g_N^n(\mu)$'s konvergiert. Anschließend zeigen wir unter bestimmten Voraussetzungen die Konvergenz der Folge der $g_N^n(\mu)$'s. Für den ganzen Abschnitt ersetzen wir $\tilde{\pi}_N$ durch $\tilde{R}_{N,1,\mu}$. Dadurch verlieren wir nicht an Allgemeinheit, da für den Fortsetzungsoperator $\tilde{\pi}_N$ und alle $g \in X_{N,2}$ gilt

$$\tilde{R}_{N,1,\mu}g = \tilde{\pi}_N g + r^0(\mu),$$

mit einem Rest $r^0(\mu) \in X_{N,1}^0$. Da weiter für $n \geq 1$ gilt

$$f_1(r^0(\mu); \mu) - a_1(u_{N,1}^n(\mu), r^0(\mu); \mu) = 0,$$

kann man im reduzierten iterativen Schema $\tilde{\pi}_N$ äquivalent durch $\tilde{R}_{N,1,\mu}$ ersetzen. Wir definieren nun eine neue Norm auf $X_{N,2}$. Die Wohldefiniertheit ist durch die Punkte I,III der Bedingungen 3.7 gesichert.

Definition 4.6 (Normen):

Wir definieren folgende Norm:

$$g \in X_{N,2} : \|g\|_{\Gamma,\mu} := \|\tilde{R}_{N,1,\mu}g\|_{1,\mu}.$$

Diese Norm wird durch folgendes Skalarprodukt auf $X_{N,2}$ induziert:

$$(g, \hat{g})_{\Gamma,\mu} = a_1(\tilde{R}_{N,1,\mu}g, \tilde{R}_{N,1,\mu}\hat{g}; \mu).$$

Lemma 4.7:

Für $\mu \in \mathcal{P}$ existiere ein $\theta_{N,\min}(\mu) > 0$ mit $\theta_N^n(\mu) \geq \theta_{N,\min}(\mu)$ für alle $n \geq 1$. Falls die Folge $\{g_N^n(\mu)\}_{n \geq 1}$ für $n \rightarrow \infty$ in $X_{N,2}$ konvergiert, konvergieren auch die Folgen der Iterierten $u_{N,1}^n(\mu)$ und $u_{N,2}^n(\mu)$ in $X_{N,1}$ bzw. $X_{N,2}$.

Wir lassen im Folgenden die μ -Abhängigkeit weg. Der Beweis von Lemma 4.7 verläuft analog zum Beweis von (3.1) in [15].

Beweis:

$X_{N,2}$ ist endlicher Teilraum von X_2 und damit ein Hilbertraum. Gleiches gilt für $X_{N,1} \subset X_1$. In endlichen normierten Räumen sind alle Normen äquivalent. Wir brauchen demnach nur die Konvergenz bzgl. der Normen $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ zu zeigen. Da $X_{N,2}$ vollständig ist, ist $\{g_N^n\}_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge. Wir zeigen nun, dass $\{u_{N,1}^n\}_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $X_{N,1}$ ist. Wegen (3.3) gilt $a_1(u_{N,1}^m - u_{N,1}^n, v) = 0, \forall v \in X_{N,1}^0$ und deshalb

$$\|u_{N,1}^m - u_{N,1}^n\|_1 = \|\tilde{R}_{N,1}(g_N^{m-1} - g_N^{n-1})\|_1 \stackrel{def}{=} \|g_N^{m-1} - g_N^{n-1}\|_{\Gamma}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert gegen 0 für $m, n \rightarrow \infty$ und damit ist $\{u_{N,1}^n\}_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge. Nun zu $\{u_{N,2}^n\}_{n \geq 1}$. Wegen (3.6) gilt

$$u_{N,2}^n = \frac{1}{\theta_N^n}(g_N^n - g_N^{n-1}) + g_N^{n-1}.$$

Nach Voraussetzung ist die Folge $\{1/\theta_N^n\}_{n \geq 1}$ beschränkt. Durch Grenzwertbildung der obigen Gleichung erhält man also die Konvergenz von $u_{N,2}^n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{N,2}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_N^{n-1}. \quad (4.5)$$

□

Lemma 4.8:

Die beiden Grenzwerte $u_{N,1}$, $u_{N,2}$ der Folgen $\{u_{N,1}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{u_{N,2}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllen (4.3), (4.4) und $u_{N,1}^\Gamma = \tilde{\pi}_N u_{N,2}$, d.h. ergeben zusammengesetzt die Lösung des reduzierten unzerlegten Problems.

Beweis:

Die Gleichungen (4.3) und (4.4) erhält man durch Grenzübergang in (3.3) und (3.5). Mit (4.5) und der Stetigkeit von π_N folgt

$$u_{N,1}^\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{N,1}^n{}^\Gamma = \tilde{\pi}_N \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_N^{n-1} \right) = \tilde{\pi}_N \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_{N,2}^n \right) = \tilde{\pi}_N u_{N,2}.$$

□

Für die Konvergenz des reduzierten iterativen Verfahrens bleibt zu zeigen, dass die Folge $\{g_N^n\}_{n \geq 1}$ in $X_{N,2}$ konvergiert. Wir verfolgen dazu wieder die selben Schritte wie in [15]. Wir definieren einen Operator $T : X_{N,2} \rightarrow X_{N,2}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} X_{N,2}^\Gamma \ni g &\mapsto Tg = w_2, \\ w_2 \in X_{N,2} : a_2(w_2, v) &= -a_1(w_1, \tilde{R}_{N,1}v), & \forall v \in X_{N,2}, \\ w_1 \in X_{N,1} : a_1(w_1, v) &= 0, & \forall v \in X_{N,1}^0, \\ w_1^\Gamma &= \tilde{\pi}_N g. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} w_1 &= \tilde{R}_{N,1}g, \\ w_2 &= \tilde{R}_{N,2}w_2 = \tilde{R}_{N,2}Tg. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für ein $\theta > 0$ definieren wir dann

$$T_\theta : X_{N,2} \rightarrow X_{N,2} : T_\theta g = \theta Tg + (1 - \theta)g.$$

Sei nun $g_N := u_{N,2}$, wobei $u_N \in X_N$ die Lösung des reduzierten unzerlegten Problems ist. Man kann mit Lemma 4.5 leicht nachrechnen, dass gilt

$$g_N^{n+1} - g_N = T_{\theta_N^n}(g_N^n - g_N). \quad (4.8)$$

Wenn nun $T_{\theta_N^n}$ eine Kontraktion ist, dann konvergiert g_N^n gegen g_N . Dies benutzen wir im folgenden Lemma.

Lemma 4.9:

Es existiert ein $\theta_N^* \in (0, 1]$, so dass die Folge $\{g_N^n\}_{n \geq 1}$ in $X_{N,2}$ gegen g_N konvergiert, wenn $0 < \theta_N^n < \theta_N^*$ für alle $n \geq 1$.

Beweis:

Wir zeigen, dass T_θ eine Kontraktion ist, falls θ passend gewählt ist. Dazu betrachten wir

$$\|T_\theta g\|_\Gamma^2 = \theta^2 \|Tg\|_\Gamma^2 + 2\theta(1 - \theta)(g, Tg)_\Gamma + (1 - \theta)^2 \|g\|_\Gamma^2. \quad (4.9)$$

Wenn wir in Gleichung (4.6) $v := \tilde{R}_{N,2}Tg$ setzen erhalten wir zusammen mit Gleichung (4.7)

$$(g, Tg)_\Gamma = a_1 \left(\tilde{R}_{N,1}g, \tilde{R}_{N,1}Tg \right) = -a_2 \left(\tilde{R}_{N,2}Tg, \tilde{R}_{N,2}Tg \right) = -\|\tilde{R}_{N,2}Tg\|_2^2. \quad (4.10)$$

Damit erhalten wir in (4.9)

$$\|T_\theta g\|_\Gamma^2 = \theta^2 \|Tg\|_\Gamma^2 - 2\theta(1-\theta) \|\tilde{R}_{N,2} Tg\|_2^2 + (1-\theta)^2 \|g\|_\Gamma^2. \quad (4.11)$$

Wir benötigen nun die Äquivalenz der Normen $\|\tilde{R}_{N,1} \cdot\|_1$ und $\|\tilde{R}_{N,2} \cdot\|_2$ auf $X_{N,2}$. Da $X_{N,2}$ endlich-dimensional ist, ist diese gegeben. Also existieren zwei Konstanten σ_N und τ_N mit

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1^2 &\leq \sigma_N \|\tilde{R}_{N,2} g\|_2^2, \\ \|\tilde{R}_{N,2} g\|_2^2 &\leq \tau_N \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1^2. \end{aligned}$$

Mit (4.10) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \|Tg\|_\Gamma^2 &= \|\tilde{R}_{N,1} Tg\|_1^2 \leq \sigma_N \|\tilde{R}_{N,2} Tg\|_2^2 \\ &= -\sigma_N a_1 \left(\tilde{R}_{N,1} g, \tilde{R}_{N,1} Tg \right) \leq \sigma_N \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1 \|\tilde{R}_{N,1} Tg\|_1 \\ &= \sigma_N \|g\|_\Gamma \|Tg\|_\Gamma. \end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir daraus

$$\|Tg\|_\Gamma \leq \sigma_N \|g\|_\Gamma.$$

Nun müssen wir noch den zweiten Term in (4.11) abschätzen. Gleichung (4.6) mit $v := \tilde{R}_{N,2} g$ ergibt $a_1(\tilde{R}_{N,1} g, \tilde{R}_{N,1} g) = -a_2(\tilde{R}_{N,2} Tg, \tilde{R}_{N,2} g)$ und zusammen mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1^2 &= a_1 \left(\tilde{R}_{N,1} g, \tilde{R}_{N,1} g \right) = -a_2 \left(\tilde{R}_{N,2} Tg, \tilde{R}_{N,2} g \right) \\ &\leq \|\tilde{R}_{N,2} Tg\|_2 \|\tilde{R}_{N,2} g\|_2 \\ &\leq \sqrt{\tau_N} \|\tilde{R}_{N,2} Tg\|_2 \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1. \end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir daraus

$$\|\tilde{R}_{N,2} Tg\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{\tau_N}} \|\tilde{R}_{N,1} g\|_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau_N}} \|g\|_\Gamma.$$

Setzen wir nun die gewonnenen Abschätzungen in (4.11) ein, erhalten wir schließlich

$$\|T_\theta g\|_\Gamma \leq \kappa_N(\theta) \|g\|_\Gamma,$$

mit

$$\kappa_N(\theta) := \left(\theta^2 \sigma_N^2 + (1-\theta^2) - \frac{2\theta(1-\theta)}{\tau_N} \right)^{1/2}.$$

Man kann leicht zeigen, dass $\kappa_N(\theta) < 1$, falls $0 < \theta < \theta_N^*$ mit

$$\theta_N^* := \min \left(1, \frac{2(\tau_N + 1)}{\sigma_N^2 \tau_N + \tau_N + 2} \right)$$

und damit ist die Aussage gezeigt. \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer schematischen Zusammenfassung der bisherigen Definitionen und Ergebnisse in Abbildung 4.1.

	iterativ		unzerlegt
detailliert	$u^n(\mu)$	$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$	$u(\mu)$
	$\downarrow \text{red.}$		$\downarrow \text{red.}$
reduziert	$u_N^n(\mu)$	$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$	$u_N(\mu)$

Abbildung 4.1: Problemübersicht und Zusammenhänge, siehe Gleichungen 2.2, 4.2 und Definitionen 2.12, 3.8

4.3 A-posteriori Fehleraussagen

In diesem Abschnitt leiten wir einen effizienten a-posteriori Fehlerschätzer her. Dieser dient insbesondere als Baustein im Greedy-Algorithmus für die Basisgenerierung (Abschnitt 6.5.1). Eine erste Herangehensweise besteht darin die Fehler $(u_{N,k}^n(\mu) - u_k^n(\mu))$ für $k = 1, 2$ zwischen den Iterierten des detaillierten und des reduzierten iterativen Schemas zu betrachten. Dabei besteht die Hoffnung, dass diese bei geeigneter Wahl der Basen (siehe Definitionen 3.1, 3.2) beliebig klein werden. Eine wichtige Größe im Zusammenhang mit a-posteriori Abschätzungen ist das Residuum.

Definition 4.10 (Residuen I):

Für $n \geq 1$ und $\mu \in \mathcal{P}$ definieren wir das Residuum $r_1^n(\cdot; \mu) : X_1^0 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r_1^n(v; \mu) := a_1(u_{N,1}^n(\mu), v; \mu) - f_1(v; \mu), \quad \forall v \in X_1^0$$

und das Residuum $r_2^n(\cdot; \mu) : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r_2^n(v; \mu) := a_2(u_{N,2}^n(\mu), v; \mu) - f_2(v; \mu) - b(u_{N,1}^n(\mu), v; \mu), \quad \forall v \in X_2.$$

Wir bezeichnen mit $\nu_1^n(\mu) \in X_1^0$ bzw. $\nu_2^n(\mu) \in X_2$ die Riesz-Repräsentanten von r_k^n .

Satz 4.11:

Sei $R_1: X_\Gamma \rightarrow X_1$ ein beliebiger stetiger Fortsetzungsoperator. Für den Fehler $e_{N,1}^n(\mu) := u_1^n(\mu) - u_{N,1}^n(\mu)$ gilt in der Energienorm

$$\begin{aligned} \|e_{N,1}^n(\mu)\|_{1,\mu} &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(\mu)}} \|\nu_1^n(\mu)\|_{X_1} \\ &\quad + \sqrt{\gamma_1(\mu)} c_{R_1} \left(\left\| \gamma u_{N,1}^n(\mu) \right\|_\Gamma + c_{\text{sup}} + \|\gamma g_N^{n-1} - g^{n-1}\|_\Gamma \right), \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_{R_1} := \|R_1\|_{\mathcal{L}(X_\Gamma, X_1)}$ und $c_{\text{sup}} := \sup_{v \in X_{N,\Gamma}^2} \|v - \pi_N v\|_\Gamma$.

Beweis:

Der Übersichtlichkeit wegen lassen wir die μ -Abhängigkeit weg. Wir definieren ${}_0e_{N,1}^n := e_{N,1}^n - R_1 \gamma e_{N,1}^n$. Es gilt ${}_0e_{N,1}^n \in X_1^0$. Wir können daher die Energienorm folgendermaßen

abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|0e_{N,1}^n\|_1^2 &= a_1(0e_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) = a_1(e_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) - a_1(R_1\gamma e_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) \\
&= f_1(0e_{N,1}^n) - a_1(u_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) - a_1(R_1\gamma e_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) \\
&= r_1^n(0e_{N,1}^n) - a_1(R_1\gamma e_{N,1}^n, 0e_{N,1}^n) \\
&\leq \|\nu_1^n\|_{X_1} \|0e_{N,1}^n\|_{X_1} + \|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_1 \|0e_{N,1}^n\|_1 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \|\nu_1^n\|_{X_1} \|0e_{N,1}^n\|_1 + \sqrt{\gamma_1} \|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1} \|0e_{N,1}^n\|_1.
\end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir

$$\|0e_{N,1}^n\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \|\nu_1^n\|_{X_1} + \sqrt{\gamma_1} \|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1}.$$

Wenn wir nun noch die Dreiecksungleichung und die Stetigkeit von a_1 ausnutzen, bekommen wir eine Abschätzung für die Energienorm von $e_{N,1}^n$.

$$\begin{aligned}
\|e_{N,1}^n\|_1 &\leq \|0e_{N,1}^n\|_1 + \sqrt{\gamma_1} \|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \|\nu_1^n\|_{X_1} + 2\sqrt{\gamma_1} \|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1}.
\end{aligned}$$

Den Term $\|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1}$ können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|R_1\gamma e_{N,1}^n\|_{X_1} &\leq c_{R_1} \|\gamma e_{N,1}^n\|_{X_\Gamma} \\
&\leq c_{R_1} \left(\|\gamma u_1^n - \gamma u_{N,1}^n\|_\Gamma + \|\gamma u_{N,1}^n\|_\Gamma \right)
\end{aligned}$$

Weiter können wir $\|\gamma u_1^n - \gamma u_{N,1}^n\|_\Gamma$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\|\gamma u_1^n - \gamma u_{N,1}^n\|_\Gamma &\leq \|g^{n-1} - \gamma \tilde{\pi}_N g_N^{n-1}\|_\Gamma \\
&\leq \|\gamma(\tilde{\pi}_N g_N^{n-1} - g_N^{n-1})\|_\Gamma + \|\gamma g_N^{n-1} - g^{n-1}\|_\Gamma \\
&\leq c_{\text{sup}} + \|\gamma g_N^{n-1} - g^{n-1}\|_\Gamma.
\end{aligned}$$

Nach Zusammensetzen der Ungleichungen erhalten wir die Behauptung. \square

Falls $X_{N,1}^0 \subset X_1^0$, ist $\|\gamma u_{N,1}^n(\mu)\|_\Gamma = 0$. Die Konstante c_{sup} wird 0, falls $X_{N,\Gamma}^2 = X_{N,\Gamma}^1$. Wie wir im Beweis von Satz 4.2 gesehen haben, gilt ebenso $\|\nu_1^n(\mu)\|_{X_1} = 0$, falls $u_1^n(\mu) \in X_{N,1}$ und $\gamma g_N^{n-1}(\mu) = g^{n-1}(\mu)$. Um den Fehler $e_{N,1}^n(\mu)$ vollständig in den Griff zu bekommen, müssen wir also $\|\gamma g_N^{n-1}(\mu) - g^{n-1}(\mu)\|_\Gamma$ betrachten. Unter der Annahme $\theta_N^i(\mu) = \theta^i(\mu)$, für $i \geq 1$ gilt

$$\|\gamma g_N^n(\mu) - g^n(\mu)\|_\Gamma \leq \sum_{i=1}^n \theta^i(\mu) \|\gamma e_{N,2}^i(\mu)\|_\Gamma \prod_{j=i+1}^n (1 - \theta^j(\mu)),$$

mit dem Fehler $e_{N,2}^n(\mu) := u_2^n(\mu) - u_{N,2}^n(\mu)$. Dies folgt mit vollständiger Induktion aus

$$\|\gamma g_N^n(\mu) - g^n(\mu)\|_\Gamma \leq (1 - \theta^n(\mu)) \|\gamma g_N^{n-1}(\mu) - g^{n-1}(\mu)\|_\Gamma + \theta^n(\mu) \|\gamma e_{N,2}^n(\mu)\|_\Gamma$$

und $\|\gamma g_N^0(\mu) - g^0(\mu)\|_\Gamma = 0$. Es folgt eine Abschätzung für $e_{N,2}^n(\mu)$ in der X_2 -Norm.

Satz 4.12:

Sei $R_1: X_\Gamma \rightarrow X_1$ ein beliebiger stetiger Fortsetzungsoperator. Für den Fehler $e_{N,2}^n(\mu) := u_2^n(\mu) - u_{N,2}^n(\mu)$ in der X_2 -Norm

$$\|e_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2} \leq \frac{1}{\alpha_2(\mu)} \left(\|\nu_2^n(\mu)\|_{X_2} + \sqrt{\gamma_1(\mu)} c_{R_1} c_\gamma \|e_{N,1}^n(\mu)\|_{1,\mu} \right),$$

mit der Konstante c_{R_1} aus Satz 4.11 und $c_\gamma := \|\gamma\|_{\mathcal{L}(X_2, X_\Gamma)}$.

Beweis:

Wir schätzen zuerst $e_{N,2}^n$ in der Energienorm ab und lassen die μ -Abhängigkeit wieder weg.

$$\begin{aligned} \|e_{N,2}^n\|_2^2 &= a_2(e_{N,2}^n, e_{N,2}^n) = f_2(e_{N,2}^n) - b(u_1^n, e_{N,2}^n) - a_2(u_{N,2}^n, e_{N,2}^n) \\ &= r_2^n(e_{N,2}^n) - f_1(R_1 \gamma e_{N,2}^n) + a_1(u_1^n, R_1 \gamma e_{N,2}^n) \\ &= r_2^n(e_{N,2}^n) + a_1(e_{N,1}^n, R_1 \gamma e_{N,2}^n) \\ &\leq \|\nu_2^n\|_{X_2} \|e_{N,2}^n\|_{X_2} + \|e_{N,1}^n\|_1 \|R_1 \gamma e_{N,2}^n\|_1. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Stetigkeit der Bilinearform a_1 , der Fortsetzung R_1 und der Spur-Abbildung γ :

$$\|R_1 \gamma e_{N,2}^n\|_1 \leq \sqrt{\gamma_1} c_{R_1} c_\gamma \|e_{N,2}^n\|_{X_2}.$$

Dies setzen wir oben ein und erhalten mit der Koerzivität von a_2 eine Abschätzung für die X_2 -Norm von $e_{N,2}^n$:

$$\|e_{N,2}^n\|_{X_2} \leq \frac{1}{\alpha_2} \left(\|\nu_2^n\|_{X_2} + \sqrt{\gamma_1} c_{R_1} c_\gamma \|e_{N,1}^n\|_1 \right).$$

□

Wegen $\|\gamma e_{N,2}^n(\mu)\|_\Gamma \leq c_\gamma \|e_{N,2}^n(\mu)\|_{X_2}$ knüpft diese zuletzt gewonnene Ungleichung direkt an die Abschätzung von $\|e_{N,1}^n(\mu)\|_{1,\mu}$ an. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir auch gesehen, dass unter geeigneten Bedingungen $\|\nu_2^n(\mu)\|_{X_2} = 0$ gilt. Wenn wir all diese Resultate zusammenfassen, erhalten wir

$$\|e_{N,1}^n(\mu)\|_1 \leq \text{const}_1 + \text{const}_2 \|e_{N,1}^{n-1}(\mu)\|_1,$$

mit einer Konstante const_1 , die durch passendes Erweitern des Raumes X_N beliebig klein wird. Der Fehler $e_{N,1}^1(\mu)$ wird wegen $\gamma g_N^0(\mu) = g^0(\mu)$ auch beliebig klein.

Wir haben so bereits einige Kriterien für die Basiswahl bekommen. Für große n sind die bisherigen Ergebnisse als Schätzer jedoch nicht zu gebrauchen. Im Folgenden leiten wir daher auf direktem Weg eine Abschätzung für den Fehler $u_N^n(\mu) - u(\mu)$ zwischen den Iterierten des reduzierten iterativen Verfahrens und der Lösung des detaillierten unzerlegten Problems her. Dabei bezeichnet $u_N^n(\mu) \in \hat{X}$ die Zusammensetzung der beiden Iterierten $u_{N,1}^n(\mu)$ und $u_{N,2}^n(\mu)$.

Definition 4.13 (Residuen II):

Für $n \geq 1$ und $\mu \in \mathcal{P}$ definieren wir das Residuum $r^n(\cdot; \mu) : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r^n(v; \mu) := a(u_N^n(\mu), v; \mu) - f(v; \mu), \quad \forall v \in X.$$

Das Residuum $r(\cdot; \mu) : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$r(v; \mu) := a(u_N(\mu), v; \mu) - f(v; \mu), \quad \forall v \in X.$$

Mit $\nu^n(\mu), \nu(\mu) \in X$ bezeichnen wir die Riesz-Repräsentanten von $r^n(\cdot; \mu)$ bzw. $r(\cdot; \mu)$.

Satz 4.14 (a-posteriori Fehlerschätzer):

Sei R_1 irgendeine Fortsetzung von X_Γ nach X_1 . Für $n \geq 1$ und $\mu \in \mathcal{P}$ gilt für den Fehler $u_N^n(\mu) - u(\mu)$ in der Energienorm

$$\|u_N^n(\mu) - u(\mu)\|_\mu \leq \Delta_N^{\text{en},n}(\mu)$$

und in der \hat{X} -Norm

$$\|u_N^n(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}} \leq \Delta_N^n(\mu),$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_N^{\text{en},n}(\mu) &:= \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X + 2\sqrt{\hat{\gamma}(\mu)} \|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}, \\ \Delta_N^n(\mu) &:= \frac{1}{\hat{\alpha}(\mu)} \|\nu^n(\mu)\|_X + 2\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(\mu)}{\hat{\alpha}(\mu)}} \|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beweis:

Der Übersichtlichkeit wegen lassen wir die μ -Abhängigkeit der Lösungen weg. Es sei

$$\hat{u}_N^n := \begin{cases} R_1(\gamma u_{N,1}^n - \gamma u_{N,2}^n), & \Omega_1, \\ 0, & \Omega_2. \end{cases}$$

Für die Norm von \hat{u}_N^n in \hat{X} gilt

$$\|\hat{u}_N^n\|_{\hat{X}} = \|R_1(\gamma u_{N,1}^n - \gamma u_{N,2}^n)\|_{X_1}.$$

Wir setzen nun $\bar{u}_N^n := u_N^n - \hat{u}_N^n \in X$ und betrachten den Fehler $\bar{u}_N^n - u$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu^2 &= a(\bar{u}_N^n, \bar{u}_N^n - u; \mu) - a(u, \bar{u}_N^n - u; \mu) \\ &= a(u_N^n, \bar{u}_N^n - u; \mu) - a(\hat{u}_N^n, \bar{u}_N^n - u; \mu) - f(\bar{u}_N^n - u; \mu) \\ &= r^n(\bar{u}_N^n - u; \mu) - a(\hat{u}_N^n, \bar{u}_N^n - u; \mu) \\ &= (\nu^n(\mu), \bar{u}_N^n - u)_X - a(\hat{u}_N^n, \bar{u}_N^n - u; \mu). \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und der Koerzivität der Bilinearform a folgt nun

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu^2 &\leq \|\nu^n(\mu)\|_X \|\bar{u}_N^n - u\|_X + \|\hat{u}_N^n\|_\mu \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu + \|\hat{u}_N^n\|_\mu \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu \\ \Rightarrow \|\bar{u}_N^n - u\|_\mu &\leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X + \|\hat{u}_N^n\|_\mu. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und der Stetigkeit von a erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \|u_N^n - u\|_\mu &\leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X + 2\|\hat{u}_N^n\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X + 2\sqrt{\hat{\gamma}(\mu)} \|\hat{u}_N^n\|_{\hat{X}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|\nu^n(\mu)\|_X + 2\sqrt{\hat{\gamma}(\mu)} \|R_1(\gamma u_{N,1}^n - \gamma u_{N,2}^n)\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Mit $\|u_N^n - u\|_{\hat{X}} \leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}(\mu)}} \|u_N^n - u\|_\mu$ folgt der Rest der Behauptung. \square

Dieser Fehlerschätzer ist leicht zu berechnen. Desweiteren erwarten wir eine gute Effizienz. Diese werden wir später numerisch untersuchen.

Korollar 4.15:

Sei R_1 irgendeine Fortsetzung von X_Γ nach X_1 . Für $\mu \in \mathcal{P}$ gilt für den Fehler $u_N(\mu) - u(\mu)$ in der \hat{X} -Norm

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}} \leq \frac{1}{\hat{\alpha}(\mu)} \|\nu(\mu)\|_X + 2\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(\mu)}{\hat{\alpha}(\mu)}} \|R_1(\gamma u_{N,1}(\mu) - \gamma u_{N,2}(\mu))\|_{X_\Gamma}.$$

Falls zusätzlich $X_{N,1}^0 \subset X_1^0$ gilt, erhalten wir

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}} \leq \frac{1}{\hat{\alpha}(\mu)} \|\nu(\mu)\|_X + 2\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(\mu)}{\hat{\alpha}(\mu)}} \|R_1(\pi_N \gamma u_{N,2}(\mu) - \gamma u_{N,2}(\mu))\|_{X_\Gamma}.$$

Beweis:

Die erste Abschätzung erhält man durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in (4.12). Falls $X_{N,1}^0 \subset X_1^0$, folgt die zweite Abschätzung aus der ersten mit $\gamma u_{N,1}(\mu)^0 = 0$ und $\gamma u_{N,1}(\mu)^\Gamma = \pi_N \gamma u_{N,2}(\mu)$. \square

Kapitel 5

Offline/Online-Zerlegung

5.1 Affine Parameterabhängigkeit

Entscheidend für eine effiziente Berechnung der RB-Lösungen bzw. a-posteriori Fehlerschätzer ist die affine Parameterabhängigkeit der parameterabhängigen Quantitäten a_1, a_2, f_1, f_2 und $\nu^n, n \geq 1$.

Definition 5.1:

Sei Y ein Hilbertraum. Eine parametrische Funktion $s : \Omega \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt affin parametrisch, falls eine Zerlegung

$$s(x; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_s} \Theta_s^q(\mu) s^q(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \mu \in \mathcal{P}$$

existiert. Eine parametrische Linearform $l : Y \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt affin parametrisch, falls eine Zerlegung

$$l(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_l} \Theta_l^q(\mu) l^q(v), \quad \forall v \in Y \quad \forall \mu \in \mathcal{P}$$

existiert. Eine parametrische Bilinearform $c : Y \times Y \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt affin parametrisch, falls eine affine Zerlegung

$$c(v, w; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_c} \Theta_c^q(\mu) c^q(v, w), \quad \forall v, w \in Y \quad \forall \mu \in \mathcal{P}$$

existiert.

Eine affin parametrische Funktion lässt sich also zerlegen in μ -abhängige Koeffizienten und μ -unabhängige Komponenten. Im Falle der Linearformen f_1, f_2 ist die affine Parameterabhängigkeit gegeben, falls die Funktion h affin parametrisch ist. Mit einer Zerlegung von h

$$h(x; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_h} \Theta_h^q(\mu) h^q(x)$$

ist eine Zerlegung von $f_k, k = 1, 2$ gegeben durch $Q_{f_k} = Q_h, \Theta_{f_k}^q = \Theta_h^q$ und $f_k^q(v) = \int_{\Omega_k} h^q v dx, q = 1, \dots, Q_h$. In gleicher Weise erhält man affine Zerlegungen der Bilinearformen a_1 und a_2 falls die Funktionen $a_{ij}, i, j = 1, 2$ und a_0 affin parametrisch sind.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die affinen Zerlegungen von a_k, f_k für $k = 1, 2$ gegeben sind und betrachten den Riesz-Repräsentant ν^n des Residuums r^n , $n \geq 1$. Es gilt für alle $v \in X$

$$\begin{aligned} (\nu^n(\mu), v)_X &= f(v; \mu) - a(u_N^n(\mu), v; \mu) \\ &= \sum_{k=1}^2 (f_k(v; \mu) - a_k(u_{N,k}^n(\mu), v; \mu)) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{q=1}^{Q_{f_k}} \Theta_{f_k}^q(\mu) f_k^q(v) - \sum_{q=1}^{Q_{a_k}} \sum_{\bar{q}=1}^{N_k} \Theta_{a_k}^q(\mu) \underline{u}_{N,k}^n(\bar{q})(\mu) a_k^q(\varphi_{N,k}^{\bar{q}}, v) \right). \end{aligned}$$

Wir können also eine affine Zerlegung von $\nu^n(\mu)$ angeben mit der Anzahl $Q_{\nu^n} = Q_{\nu} = \sum_{k=1}^2 (Q_{f_k} + N_k Q_{a_k})$ durch den Koeffizientenvektor

$$\Theta_{\nu^n}(\mu) = \left(\Theta_{\nu^n}^1(\mu), \dots, \Theta_{\nu^n}^{Q_{\nu^n}}(\mu) \right) = \left(\Theta_{\nu^n}^{p_1}(\mu), \Theta_{\nu^n}^{p_2}(\mu) \right),$$

wobei für $k = 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{\nu^n}^{p_k}(\mu) &= \left(\Theta_{f_k}^1(\mu), \dots, \Theta_{f_k}^{Q_{f_k}}(\mu), \right. \\ &\quad \left. - \Theta_{a_k}^1(\mu) \underline{u}_{N,k}^n{}^{(1)}(\mu), \dots, -\Theta_{a_k}^{Q_{a_k}}(\mu) \underline{u}_{N,k}^n{}^{(1)}(\mu), \right. \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. - \Theta_{a_k}^1(\mu) \underline{u}_{N,k}^n{}^{(N_k)}(\mu), \dots, -\Theta_{a_k}^{Q_{a_k}}(\mu) \underline{u}_{N,k}^n{}^{(N_k)}(\mu) \right) \end{aligned}$$

und die Komponenten $(\nu^n)^q$, $q = 1, \dots, Q_{\nu}$, welche gegeben sind durch

$$((\nu^n)^q, v)_X = f_1^q(v), \quad \forall v \in X, \quad (5.1)$$

für $q = 1, \dots, Q_{f_1}$,

$$((\nu^n)^q, v)_X = a_1^i \left(\varphi_{N,1}^{(j)}, v \right), \quad \forall v \in X, \quad (5.2)$$

für $q = Q_{f_1} + Q_{a_1}(j-1) + i$, $i = 1, \dots, Q_{a_1}$, $j = 1, \dots, N_1$,

$$((\nu^n)^q, v)_X = f_2^i(v), \quad \forall v \in X, \quad (5.3)$$

für $q = Q_{f_1} + N_1 Q_{a_1} + i$, $i = 1, \dots, Q_{f_2}$ und

$$((\nu^n)^q, v)_X = a_2^i \left(\varphi_{N,2}^{(j)}, v \right), \quad \forall v \in X, \quad (5.4)$$

für $q = Q_{f_1} + N_1 Q_{a_1} + Q_{f_2} + Q_{a_2}(j-1) + i$, $i = 1, \dots, Q_{a_2}$, $j = 1, \dots, N_2$.

5.2 Berechnungsvorschriften

Dank der affinen Parameterabhängigkeit können wir nun die Berechnungen der für das reduzierte iterative Verfahren bzw. den Fehlerschätzer benötigten Vektoren und Matrizen in eine parameterunabhängige Phase (Offline-Phase) und eine parameterabhängige Phase (Online-Phase) aufteilen. Dies trägt erheblich zur Effizienz des Verfahrens bei, da wir die hochdimensionalen Rechnungen ganz aus der Online-Phase verbannen können. Insbesondere sind die Matrizen $\underline{G}_{N,11}$ und $\underline{G}_{N,12}$ nicht vom Parameter abhängig, können also komplett in der Offline-Phase berechnet werden. Auf die Erstellung der Basisfunktionen gehen wir später ein.

5.2.1 Offline/Online-Zerlegung des reduzierten iterativen Verfahrens

Offline-Phase

(off1) Berechne die reduzierten Basen $\left\{ \varphi_{N,1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_1}$, $\left\{ \varphi_{N,2}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_2}$,

(off2) berechne die Komponenten-Vektoren

$$\begin{aligned} \underline{F}_{N,1}^q &= \left(f_1^q \left(\varphi_{N,1}^{(i)} \right) \right)_{i=1}^{N_1} \quad \text{für } q = 1, \dots, Q_{f_1}, \\ \underline{F}_{N,2}^q &= \left(f_2^q \left(\varphi_{N,2}^{(i)} \right) \right)_{i=1}^{N_2} \quad \text{für } q = 1, \dots, Q_{f_2}, \end{aligned}$$

(off3) berechne die Komponenten-Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{A}_{N,1}^q &= \left(a_1^q \left(\varphi_{N,1}^{(j)}, \varphi_{N,1}^{(i)} \right) \right)_{i,j=1}^{N_1} \quad \text{für } q = 1, \dots, Q_{a_1}, \\ \underline{A}_{N,2}^q &= \left(a_2^q \left(\varphi_{N,2}^{(j)}, \varphi_{N,2}^{(i)} \right) \right)_{i,j=1}^{N_2} \quad \text{für } q = 1, \dots, Q_{a_2}, \end{aligned}$$

(off4) berechne die Matrizen $\underline{G}_{N,11}$, $\underline{G}_{N,12}$ und anschließend $\underline{G}_N := \underline{G}_{N,11}^{-1} \underline{G}_{N,12}$.

Online-Phase

Gegeben $\mu \in \mathcal{P}$, $n_{\text{stop}} \geq 1$ und $\epsilon_{\text{tol}} > 0$,

(on1) berechne die Koeffizienten $\Theta_{f_1}^q(\mu)$ für $q = 1, \dots, Q_{f_1}$, $\Theta_{f_2}^q(\mu)$ für $q = 1, \dots, Q_{f_2}$,
 $\Theta_{a_1}^q(\mu)$ für $q = 1, \dots, Q_{a_1}$, $\Theta_{a_2}^q(\mu)$ für $q = 1, \dots, Q_{a_2}$,

(on2) berechne die Vektoren

$$\begin{aligned} \underline{F}_{N,1}(\mu) &= \sum_{q=1}^{Q_{f_1}} \Theta_{f_1}^q(\mu) \underline{F}_{N,1}^q, \quad \underline{F}_{N,2}(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_{f_2}} \Theta_{f_2}^q(\mu) \underline{F}_{N,2}^q, \\ \rightarrow \underline{F}_{N,1}^0(\mu) &= \left(\underline{F}_{N,1}^{(i)}(\mu) \right)_{i \in I_1^0}, \quad \underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu) = \left(\underline{F}_{N,1}^{(i)}(\mu) \right)_{i \in I_1^\Gamma}, \end{aligned}$$

(on3) berechne die Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{A}_{N,1}(\mu) &= \sum_{q=1}^{Q_{a_1}} \Theta_{a_1}^q(\mu) \underline{A}_{N,1}^q, \quad \underline{A}_{N,2}(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_{a_2}} \Theta_{a_2}^q(\mu) \underline{A}_{N,2}^q, \\ \rightarrow \underline{A}_{N,1}^{00}(\mu) &= \left(\underline{A}_{N,1}^{(i,j)}(\mu) \right)_{i,j \in I_1^0}, \quad \underline{A}_{N,1}^{0\Gamma}(\mu) = \left(\underline{A}_{N,1}^{(i,j)}(\mu) \right)_{i \in I_1^0, j \in I_1^\Gamma}, \\ \underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu) &= \left(\underline{A}_{N,1}^{(i,j)}(\mu) \right)_{i \in I_1^\Gamma, j \in \{1, \dots, N_1\}}, \end{aligned}$$

(on4) berechne den Vektor $\underline{G}_N^T \underline{F}_{N,1}^\Gamma(\mu)$, die Matrix $\underline{G}_N^T \underline{A}_{N,1}^\Gamma(\mu)$ und die Matrizen $\underline{A}_{N,1}^{00}(\mu)^{-1}$, $\underline{A}_{N,2}(\mu)^{-1}$,

(on5) führe das reduzierte iterative Verfahren durch; breche ab, falls $n = n_{\text{stop}}$ oder falls $\sum_{k=1}^2 \|u_{N,k}^n(\mu) - u_{N,k}^{n-1}(\mu)\| < \epsilon_{\text{tol}}$.

In der Praxis leben die Basisfunktionen in hochdimensionalen Räumen, z.B. in FE-Räumen. Die Berechnungen in der Offline-Phase sind daher teuer. Die Anzahl der Basen und damit die Dimensionen N_1, N_2 der RB-Räume ist im Vergleich wesentlich kleiner. Wir wollen im Folgenden eine Komplexitätsbetrachtung machen und nehmen dazu an, dass X ein hochdimensionaler Approximationsraum mit Dimension $\dim(X) = \mathcal{N}$ ist. Weiter sei $\dim(X_1) = \mathcal{N}_1, \dim(X_2) = \mathcal{N}_2$ und $\dim(X_\Gamma) = \mathcal{N}_\Gamma$.

Wir untersuchen nun die Komplexität der Offline-Phase. In (off1) werden die Snapshots mit dem detaillierten iterativen Verfahren berechnet. Wir nehmen an, dass die Anzahl der benötigten Simulationen in $\mathcal{O}(N)$ mit $N := N_1 + N_2$ liegt. Wir nehmen außerdem an, dass die Matrizen im detaillierten iterativen Verfahren dünn besetzt sind, so dass ein Iterationsschritt in $\mathcal{O}(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2)$ liegt. Mit n_{max} bezeichnen wir die Anzahl maximal benötigter Iterationen. In (off2) haben wir die Komplexität $\mathcal{O}(N_1 \mathcal{N}_1 + N_2 \mathcal{N}_2)$ und in (off3) $\mathcal{O}(N_1^2 \mathcal{N}_1 + N_2^2 \mathcal{N}_2)$. In (off4) sind $\mathcal{O}((N_1^\Gamma)^2 + N_1^\Gamma N_2^\Gamma) \mathcal{N}_\Gamma$ Schritte für das Aufstellen der Matrizen notwendig und $\mathcal{O}((N_1^\Gamma)^3)$ für das Invertieren.

Nun analysieren wir die Komplexität der Online-Berechnungen. (on1) erfordert $\mathcal{O}(Q_{f_1} + Q_{f_2} + Q_{a_1} + Q_{a_2})$ Schritte, (on2) $\mathcal{O}(Q_{f_1} N_1 + Q_{f_2} N_2)$ und (on3) $\mathcal{O}(Q_{a_1} N_1^2 + Q_{a_2} N_2^2)$. In (on4) erfordert das Berechnen von $\underline{G}_N^T \underline{F}_{N,1}^\Gamma \mathcal{O}(N_1^\Gamma N_2^\Gamma)$ und das Berechnen von $\underline{G}_N^T \underline{A}_{N,1}^\Gamma \mathcal{O}(N_2^\Gamma (N_1^\Gamma)^2)$ Schritte. Für das Invertieren benötigen wir dann noch $\mathcal{O}((N_1^\Gamma)^3 + N_2^3)$ Schritte. Bei der Iteration selbst sind dann nur noch Matrix-Vektor-Multiplikationen involviert und wir erhalten die Komplexität $\mathcal{O}(N_1^2 + N_2^2)$ für einen Iterations-Schritt in (on5). Sei nun $n_{N,\text{max}}$ die Anzahl maximal benötigter Iterationen. Unter den Annahmen $Q_{f_k}, Q_{a_k} < N_k$ und $N < \mathcal{N}_k$ für $k = 1, 2$ ergibt sich insgesamt

- Offline-Phase: $\mathcal{O}(N n_{\text{max}} (\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2))$,
- Online-Phase: $\mathcal{O}(N_1^3 + N_2^3 + n_{N,\text{max}} (N_1^2 + N_2^2))$.

Man sieht, dass bei der Online-Phase höhere Potenzen enthalten sind. Da der Unterschied der Dimensionen aber sehr groß ist, ist die Online-Phase trotzdem sehr viel schneller durchführbar. Die Aufteilung in die Berechnungsphasen ist also lohnenswert und ermöglicht effiziente Behandlung von vielen Parameteranfragen oder Echtzeitproblemen.

5.2.2 Offline/Online-Zerlegung des Fehlerschätzers

Die X -Norm von $\nu^n(\mu)$ lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \|\nu^n(\mu)\|_X^2 &= (\nu^n(\mu), \nu^n(\mu))_X = \sum_{i,j=1}^{Q_\nu} \Theta_{\nu^n}^i(\mu) \Theta_{\nu^n}^j(\mu) \left((\nu^n)^i, (\nu^n)^j \right)_X \\ &= \underline{\Theta}_{\nu^n}^T(\mu) \underline{G} \underline{\Theta}_{\nu^n}(\mu), \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit der Matrix $\underline{G} \in \mathbb{R}^{Q_\nu \times Q_\nu}$, die gegeben ist durch

$$\underline{G}^{(i,j)} = \left((\nu^n)^i, (\nu^n)^j \right)_X, \quad \forall i, j = 1, \dots, Q_\nu. \quad (5.6)$$

Eine weitere Zutat für den Fehlerschätzer ist der Term $\|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu)) &= R_1 \gamma u_{N,1}^n(\mu) - R_1 \gamma u_{N,2}^n(\mu) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \underline{u}_{N,1}^n{}^{(i)}(\mu) R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(i)} - \sum_{i=1}^{N_2} \underline{u}_{N,2}^n{}^{(i)}(\mu) R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(i)} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}^2 \\ &= (R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu)), R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu)))_{X_1} \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_1} \underline{u}_{N,1}^n{}^{(i)}(\mu) \underline{u}_{N,1}^n{}^{(j)}(\mu) \left(R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(j)} \right)_{X_1} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \underline{u}_{N,1}^n{}^{(i)}(\mu) \underline{u}_{N,2}^n{}^{(j)}(\mu) \left(R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(j)} \right)_{X_1} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N_2} \underline{u}_{N,2}^n{}^{(i)}(\mu) \underline{u}_{N,2}^n{}^{(j)}(\mu) \left(R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(j)} \right)_{X_1} \\ &= \underline{u}_{N,1}^n(\mu)^T \underline{R}_{11} \underline{u}_{N,1}^n(\mu) - 2 \underline{u}_{N,1}^n(\mu)^T \underline{R}_{12} \underline{u}_{N,2}^n(\mu) + \underline{u}_{N,2}^n(\mu)^T \underline{R}_{22} \underline{u}_{N,2}^n(\mu) \end{aligned} \tag{5.7}$$

mit Matrizen $\underline{R}_{11} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, $\underline{R}_{12} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ und $\underline{R}_{22} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \underline{R}_{11} &= \left(\left(R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(j)} \right)_{X_1} \right)_{i,j=1}^{N_1}, \\ \underline{R}_{12} &= \left(\left(R_1 \gamma \varphi_{N,1}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(j)} \right)_{X_1} \right)_{i \in \{1, \dots, N_1\}, j \in \{1, \dots, N_2\}}, \\ \underline{R}_{22} &= \left(\left(R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(i)}, R_1 \gamma \varphi_{N,2}^{(j)} \right)_{X_1} \right)_{i,j=1}^{N_2}. \end{aligned}$$

Wir geben nun die Offline/Online-Zerlegung des Fehlerschätzers an.

Offline-Phase

- (off1) Für $q = 1, \dots, Q_\nu$ berechne die Komponenten $(\nu^n)^q$ via (5.1), (5.2), (5.3) und (5.4),
- (off2) berechne die Matrix \underline{G} via (5.6),
- (off3) berechne die Matrizen \underline{R}_{11} , \underline{R}_{12} und \underline{R}_{22} .

Online-Phase

Gegeben $\mu \in \mathcal{P}$ und $n \geq 1$,

- (on1) berechne die Koeffizienten $\Theta_{\nu^n}^q(\mu)$ für $q = 1, \dots, Q_\nu$,
- (on2) berechne $\|\nu^n(\mu)\|_X$ via (5.5),
- (on3) berechne $\|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}$ via (5.7).

Auch hier geben wir die Komplexitäten der einzelnen Berechnungen an. In (off1) ist die Komplexität $\mathcal{O}(Q_\nu(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2))$, in (off2) $\mathcal{O}(Q_\nu^2(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2))$ und in (off3) $\mathcal{O}((\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2)\mathcal{N}_1)$. In der Online-Phase haben wir $\mathcal{O}(Q_\nu)$ für (on1), $\mathcal{O}(Q_\nu^2)$ für (on2) und $\mathcal{O}(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2)$ für (on3). Wir erinnern daran, dass $Q_\nu = \sum_{k=1}^2 (Q_{f_k} + N_k Q_{a_k})$ war und fassen die Ergebnisse zusammen. Unter der Annahme $Q_\nu < \mathcal{N}_k$ für $k = 1, 2$ gilt

- Offline-Phase: $\mathcal{O}(Q_\nu(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2))$,
- Online-Phase: $\mathcal{O}(Q_\nu^2)$.

Der Fehlerschätzer ist also in der Online-Phase effizient berechenbar. Dies ist entscheidend für den Greedy-Algorithmus (6.5.1).

Bemerkung 5.2:

Die Komponenten $(\nu^n)^q$ sind Funktionen auf ganz Ω und werden mit dem vollen iterativen Schema 2.12 approximiert, indem die Linear- bzw. Bilinearformen entsprechend ausgetauscht werden. Wir untersuchen im Folgenden den dadurch induzierten Fehler. Für $q = 1, \dots, Q_\nu$ seien $(\nu^n)_{\text{appr}}^q$ die Approximationen für $(\nu^n)^q$. Wir erhalten dann mit

$$\nu_{\text{appr}}^n(\mu) := \sum_{q=1}^{Q_\nu} \Theta_{\nu^n}^q(\mu) (\nu^n)_{\text{appr}}^q$$

eine Approximation für $\nu^n(\mu)$ und mit

$$\Delta_{N,\text{appr}}^n(\mu) := \frac{1}{\hat{\alpha}(\mu)} \|\nu_{\text{appr}}^n(\mu)\|_X + 2\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(\mu)}{\hat{\alpha}(\mu)}} \|R_1(\gamma u_{N,1}^n(\mu) - \gamma u_{N,2}^n(\mu))\|_{X_1}$$

eine Approximation für den Fehlerschätzer $\Delta_N^n(\mu)$. Wir definieren außerdem

$$\epsilon_{\nu,\text{appr}} := \max_{q=1,\dots,Q_\nu} \left\| (\nu^n)^q - (\nu^n)_{\text{appr}}^q \right\|_X$$

und schätzen nun den Fehler $\nu^n(\mu) - \nu_{\text{appr}}^n(\mu)$ ab:

$$\begin{aligned} \|\nu^n(\mu) - \nu_{\text{appr}}^n(\mu)\|_X &= \left\| \sum_{q=1}^{Q_\nu} \Theta_{\nu^n}^q(\mu) \left((\nu^n)^q - (\nu^n)_{\text{appr}}^q \right) \right\|_X \\ &\leq \sum_{q=1}^{Q_\nu} |\Theta_{\nu^n}^q(\mu)| \left\| (\nu^n)^q - (\nu^n)_{\text{appr}}^q \right\|_X \\ &\leq \epsilon_{\nu,\text{appr}} \sum_{q=1}^{Q_\nu} |\Theta_{\nu^n}^q(\mu)|. \end{aligned}$$

Die Abweichung des approximierten Residuums und damit auch die Abweichung des approximierten Fehlerschätzers sind also linear in $\epsilon_{\nu,\text{appr}}$. Die Konstante $C_{\nu,\text{appr}} := \sum_{q=1}^{Q_\nu} |\Theta_{\nu^n}^q(\mu)|$ ist online berechenbar.

Kapitel 6

Numerische Experimente

6.1 Modell

Wir betrachten eine einfache Wärmeleitungsgleichung auf dem Gebiet $\Omega = (0, 1)^2$. Die Wärmeleitfähigkeit sei auf den Blöcken B_i , $i = 1, \dots, 4$ (siehe Abbildung 6.1a), welche aus unterschiedlichem Material bestehen mögen, jeweils konstant.

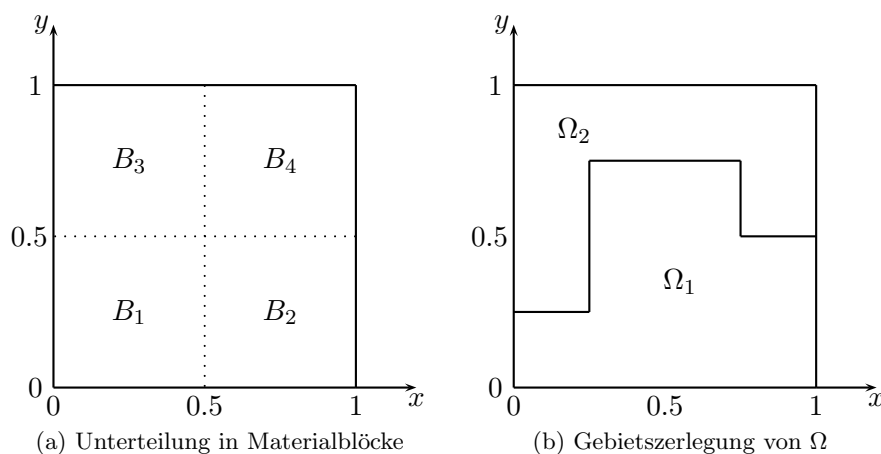


Abbildung 6.1: Modellgebiet Ω

Die Differentialgleichung laute

$$\begin{aligned} -\nabla(\kappa(x; \mu) \nabla u(x; \mu)) &= h(x; \mu), & x \in \Omega, \\ u(x; \mu) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei der Parametervektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_4)^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ aus den Wärmeleitkoeffizienten der Blöcke B_i , $i = 1, \dots, 3$ und einem Gewicht in der Quellfunktion $h(x; \mu)$ bestehe. Das Parametergebiet \mathcal{P} sei gegeben durch $\mathcal{P} = [0.1, 10]^3 \times [0, 1]$. $\kappa(x; \mu)$ sei also gegeben durch

$$\kappa(x; \mu) = \sum_{i=1}^3 \mu_i \chi_{B_i}(x) + \chi_{B_4}(x),$$

wobei χ_{B_i} die charakteristische Funktion auf B_i sei. Der Wärmeleitkoeffizient auf B_4 ist also konstant 1. Die Quellfunktion sei gegeben durch

$$h(x; \mu) = 2\mu_5 \exp(-\beta_1 |x - z_1|^2) + 2(1 - \mu_5) \exp(-\beta_2 |x - z_2|^2),$$

mit den Konstanten $\beta_1 = \beta_2 = 20$ und den Punkten $z_1 = (0.5, 0.5)^T$ und $z_2 = (0.875, 0.875)^T$ in Ω . Die Abbildung 6.2 zeigt die Quellfunktion für zwei verschiedene Parameter. Die gewählte Gebietszerlegung in zwei Teilgebiete wird in Abbildung 6.1b veranschaulicht.

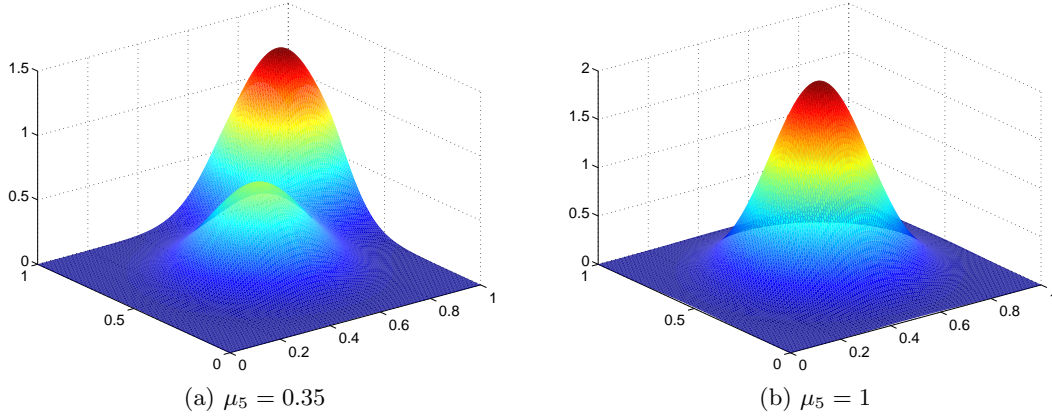


Abbildung 6.2: Quellfunktion $h(\mu)$ für zwei unterschiedliche Parameter

Anhand den Konturbildern in Abbildung 6.3 soll deutlich werden, dass die Lösung der Differentialgleichung stark mit dem Parameter variiert und daher eine gute Approximation durch RB-Lösungen nicht trivial ist.

6.2 Detaillierte Simulation

Die detaillierte Simulation (Simulation des detaillierten iterativen Verfahrens) wird mit 10 zufällig ausgewählten Parametern getestet. Als Diskretisierungsmethode verwenden wir die FE-Methode mit einer regelmäßigen, uniformen Triangulierung und linearen nodalen Basisfunktionen. Es sei also \mathcal{T}_h eine zulässige Zerlegung [5] von Ω in Dreieckselemente und $X = \mathcal{S}_h$ die Menge der Funktionen

$$\mathcal{S}_h := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\},$$

dabei ist h der maximale Durchmesser aller Dreieckselemente aus \mathcal{T}_h . Wir fordern außerdem $\forall T \in \mathcal{T}_h : T \in \overline{\Omega}_1 \vee T \in \overline{\Omega}_2$, d.h. die Triangulierung ist konform bzgl. der Gebietszerlegung.

Der optimale Relaxationsparameter $\theta_{\text{opt}}(\mu)$ ist gegeben durch

$$\theta_{\text{opt}}(\mu) = \frac{\tau(\mu) + 1}{\sigma(\mu)^2 \tau(\mu) + \tau(\mu) + 2}, \quad (6.1)$$

mit Konstanten $\sigma(\mu)$ und $\tau(\mu)$ [15] ähnlich wie im Beweis von 4.9 und wird angenähert, indem in obiger Formel $\tau(\mu)$ und $\sigma(\mu)$ durch Approximationen $\hat{\tau}(\mu)$ und $\hat{\sigma}(\mu)$ ersetzt werden. $\theta_{\text{appr}}(\mu)$ sei der daraus resultierende Parameter. Wir setzen dann $\theta^n(\mu) = \theta_{\text{appr}}(\mu)$ für $n \geq 1$. Die Iteration wird abgebrochen, falls eine vorgegebene Toleranz unterschritten wird, oder eine bestimmte maximale Anzahl an Iterationen erreicht wird. Da nicht zwingend $\theta_{\text{appr}}(\mu) < \theta_{\text{opt}}(\mu)$ gilt und damit die Konvergenz nicht gesichert ist, führen wir folgenden Algorithmus aus.

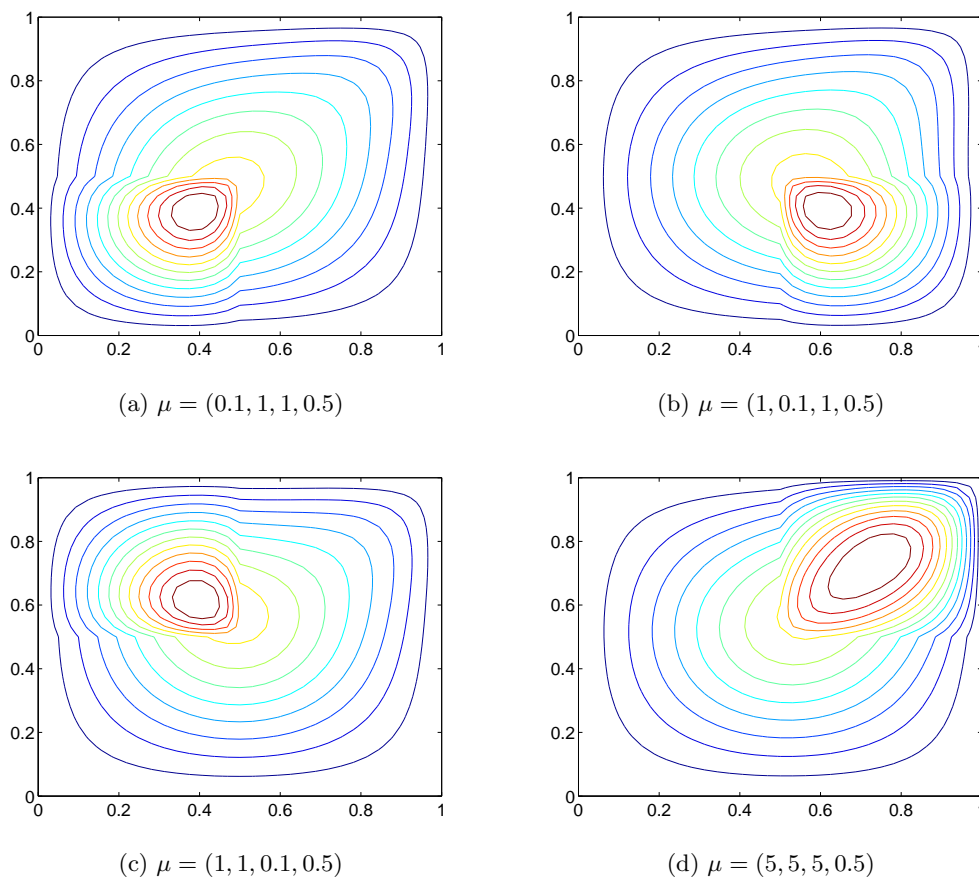


Abbildung 6.3: FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems für 4 verschiedene Parameter

- Algorithmus zur detaillierten Simulation:

Gegeben $\mu \in \mathcal{P}$

- berechne $\theta_{\text{appr}}(\mu)$
- führe detailliertes iteratives Verfahren durch
- $n_{re} = 0$
- solange $n_{it} = n_{it_max}$ und $n_{re} < n_{re_max}$
 - $n_{re} = n_{re} + 1$
 - $\theta_{\text{appr}}(\mu) = \theta_{\text{appr}}(\mu)/2$
 - führe detailliertes iteratives Verfahren durch
- falls $n_{re} = n_{re_max}$, warnung

Heierbei sind $n_{it_max}, n_{re_max} \in \mathbb{N}$ vorgegebene Konstanten und $n_{it} \in \mathbb{N}$ die Anzahl der im detaillierten iterativen Verfahren durchgeführten Iterationen. Wir wählen $n_{it_max} = 5000$ und $n_{re_max} = 5$. Zu jedem Parameter μ werden die Ergebnisse des letzten durchgeführten Verfahrens des Algorithmus festgehalten. Tabelle 6.1 zeigt die

Anzahl benötigter Iterationen bei zwei unterschiedlichen Schrittweiten und vorgegebenen Abbruch-Toleranzen (gleiches Kriterium wie in Bemerkung 3.9) $tol_1 = 1 \cdot 10^{-7}$, $tol_2 = 1 \cdot 10^{-14}$ und Abbildung 6.4 zeigt die zugehörigen Fehlerdiagramme des Fehler der Iterierten zur Lösung des detaillierten unzerlegten Problems. Für $h = 0.0884$ gilt $|\mathcal{T}_h| = 256$ und für $h = 0.0221$ gilt $|\mathcal{T}_h| = 4096$.

μ -Vektor	$\theta_{\text{appr}}(\mu)$	$h = 0.0884$		$h = 0.0221$	
		tol_1	tol_2	tol_1	tol_2
(9.518, 2.375, 1.009, 0.727)	0.078	99	255	99	253
(1.687, 5.131, 3.625, 0.800)	0.079	103	270	103	270
(2.708, 5.906, 8.491, 0.803)	0.132	63	164	63	164
(2.449, 4.032, 6.854, 0.568)	0.175	48	122	48	122
(3.387, 1.888, 0.315, 0.780)	0.115	71	174	71	174
(1.960, 7.238, 2.194, 0.011)	0.060	123	332	122	331
(8.941, 6.263, 5.053, 0.382)	0.087	87	231	87	230
(3.155, 3.335, 4.843, 0.503)	0.149	56	141	56	141
(2.009, 0.115, 9.641, 0.254)	0.302	28	71	28	71
(5.323, 2.934, 2.963, 0.447)	0.070	110	292	110	292

Tabelle 6.1: Anzahl Iterationen des detaillierten iterativen Verfahrens bei zwei unterschiedlichen Schrittweiten und Abbruch-Toleranzen

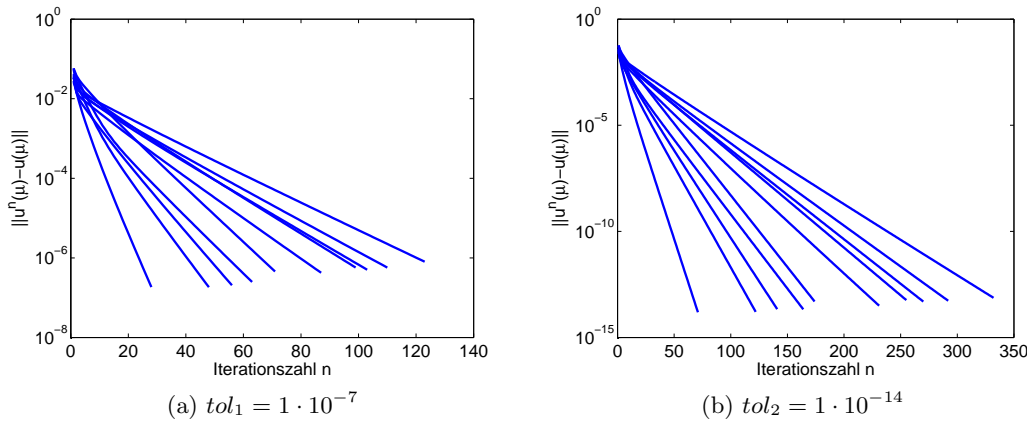


Abbildung 6.4: Fehler $\|u^n(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}}$ der Iterierten aus der detaillierten Simulation zur FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems zu den Test-Parametern aus Tabelle 6.1 im Falle $h = 0.0884$

Die Konvergenz des vollen iterativen Schemas aus Lemma 2.13 ist damit bestätigt. Die resultierende Konvergenz-Geschwindigkeit variiert hier mit dem Parameter. Dass der Relaxationsparameter für beide Schrittweiten Konvergenz bewerkstelligt ist ein Indiz dafür, dass dieser unabhängig von der Schrittweite gewählt werden kann. Abbildung 6.5 veranschaulicht noch einmal das iterative Schema anhand einem der 10 Test-Parameter. Wenn nicht anders erwähnt, verwenden wir in den folgenden Abschnitten immer die Toleranz $tol_2 = 1 \cdot 10^{-14}$ für die detaillierte Simulation.

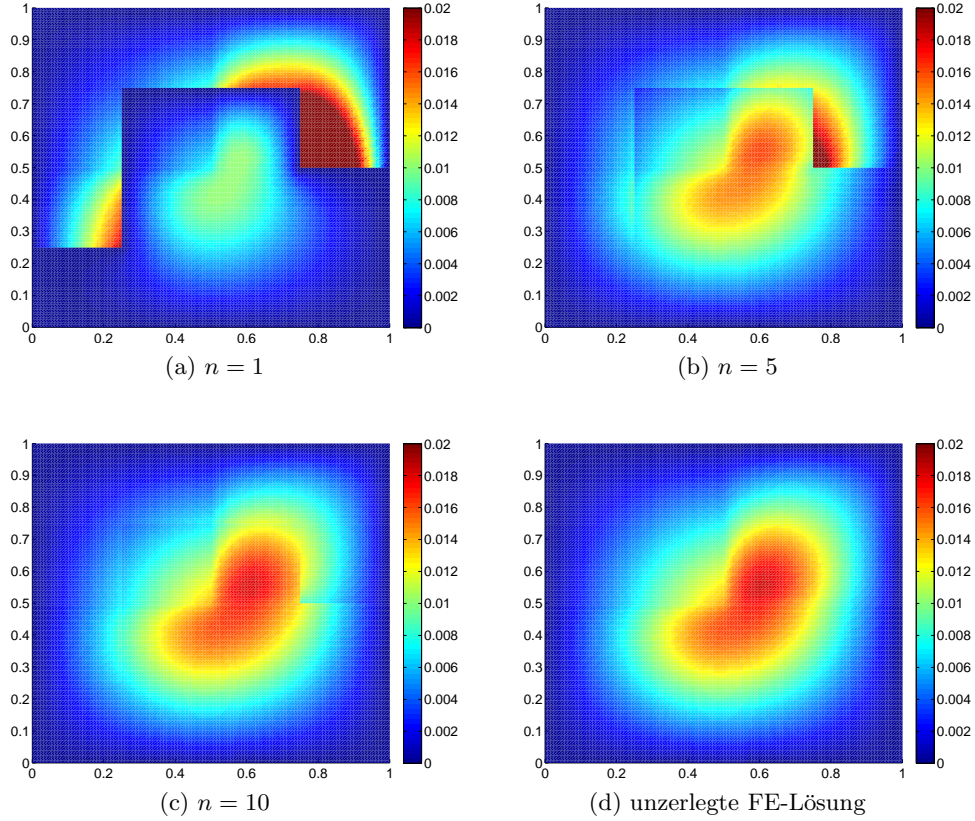


Abbildung 6.5: detaillierte Simulation für $\mu = (1.843, 2.878, 8.879, 0.874)$ und FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems

6.3 Reduzierte Simulation

Um das reduzierte iterative Schema testen zu können, benötigen wir die Basen aus Definition 3.1 und 3.2. Von vornherein ist jedoch nicht klar, wie diese zu konstruieren sind. In Kapitel 6.5 geben wir verschiedene Ideen für die Basenkonstruktion und untersuchen diese auf ihre Eignung für das Verfahren. Im Folgenden verwenden wir Basen, die aus 16 Snapshots zu Parametern aus einem uniformen 2^4 -Gitter im Parametergebiet mit der ‘‘Durchgeschnittene Snapshots’’-Methode (DS-Methode, 6.5.4) konstruiert wurden. Die Dimensionen dieser Basen sind $N_1^0 = N_1^\Gamma = N_2^\Gamma = 16$ und $N_2^0 = 0$.

6.3.1 Verfahren

Die reduzierte Simulation wird mit 10 zufällig gewählten Parametern getestet. Der optimale Relaxationsparameter $\theta_{N,\text{opt}}(\mu)$ für das reduzierte iterative Verfahren ist mit den Konstanten $\tau_N(\mu)$ und $\sigma_N(\mu)$ aus dem Beweis von Lemma 4.9 gegeben durch

$$\theta_{N,\text{opt}}(\mu) = \frac{\tau_N(\mu) + 1}{\sigma_N(\mu)^2 \tau_N(\mu) + \tau_N(\mu) + 2}$$

und wird durch $\theta_{N,\text{appr}}(\mu)$ angenähert, indem in obiger Formel $\tau_N(\mu)$ und $\sigma_N(\mu)$ durch Approximationen $\hat{\tau}_N(\mu)$ bzw. $\hat{\sigma}_N(\mu)$ ersetzt werden. Die Durchführung der Simulation erfolgt dann mit $\theta_N^n(\mu) = \theta_{N,\text{appr}}(\mu)$ für $n \geq 1$ und dem folgenden Algorithmus

mit Konstanten $num_iterations_max_N = 5000$ und $num_restarts_max_N = 5$. Als Abbruch-Toleranzen (siehe Bemerkung 3.9) geben wir $tol_{N,1} = 1 \cdot 10^{-3}$, $tol_{N,2} = 1 \cdot 10^{-7}$ und $tol_{N,3} = 1 \cdot 10^{-14}$ vor.

- Algorithmus zur reduzierten Simulation:
 - Gegeben $\mu \in \mathcal{P}$
 - berechne $\theta_{N,\text{appr}}(\mu)$
 - führe reduziertes iteratives Verfahren durch
 - $n_re_N = 0$
 - solange $n_it_N = n_it_max_N$ und $n_re_N < n_re_max_N$
 - $n_re_N = n_re_N + 1$
 - $\theta_{N,\text{appr}}(\mu) = \theta_{N,\text{appr}}(\mu)/2$
 - führe reduziertes iteratives Verfahren durch
 - falls $n_re_N = n_re_max_N$, warnung

μ -Vektor	$\theta_{N,\text{appr}}(\mu)$	$tol_{N,1}$	$tol_{N,2}$	$tol_{N,3}$
(8.166, 9.067, 1.357, 0.913)	0.045	17	156	472
(6.360, 1.066, 2.857, 0.547)	0.058	15	136	389
(9.579, 9.652, 1.660, 0.971)	0.044	17	157	477
(9.576, 4.905, 8.023, 0.142)	0.060	10	136	382
(4.275, 9.166, 7.943, 0.959)	0.049	13	149	429
(6.592, 0.454, 8.506, 0.934)	0.064	15	124	340
(6.819, 7.602, 7.457, 0.392)	0.053	10	148	427
(6.589, 1.795, 7.090, 0.032)	0.064	12	130	360
(2.842, 0.557, 1.062, 0.823)	0.066	19	123	335
(6.979, 3.239, 9.507, 0.034)	0.061	11	136	380

Tabelle 6.2: Anzahl Iterationen des reduzierten iterativen Verfahrens, $h = 0.0884$

Die Ergebnisse in Tabelle 6.2 und Abbildung 6.6 bestätigen die Konvergenz des reduzierten iterativen Verfahrens. Der Relaxationsparameter variiert hier weniger stark als bei der detaillierten Simulation. Wie wir später sehen werden, hängt dies auch davon ab, wie die Basen konstruiert werden. In Abbildung 6.6b sieht man, dass der Fehler auf eine untere Schranke zuläuft. Der Grund dafür ist, dass sich der Fehler $\|u_N^n(\mu) - u(\mu)\|$ mit wachsendem n dem Fehler $\|u_N(\mu) - u(\mu)\|$ annähert; Letzterer hängt von der Approximationsgüte der RB-Räume ab.

6.3.2 Fehlerschätzer

Nun untersuchen wir noch den a-posteriori Fehlerschätzer. Dabei gilt es vor allem die Effektivität zu untersuchen, da darüber noch keine theoretische Aussage vorliegt. Wir müssen hier noch angeben, welche Fortsetzung $R_1 : X_\Gamma \rightarrow X_1$ wir wählen, da diese beliebig war. Wir wählen die triviale Fortsetzung durch Null [15], welche gegeben ist durch

$$v \in X_\Gamma : (R_1 v)|_\Gamma = v \wedge (R_1 v)|_T = 0 \text{ falls } \partial T \cap \Gamma = \emptyset.$$

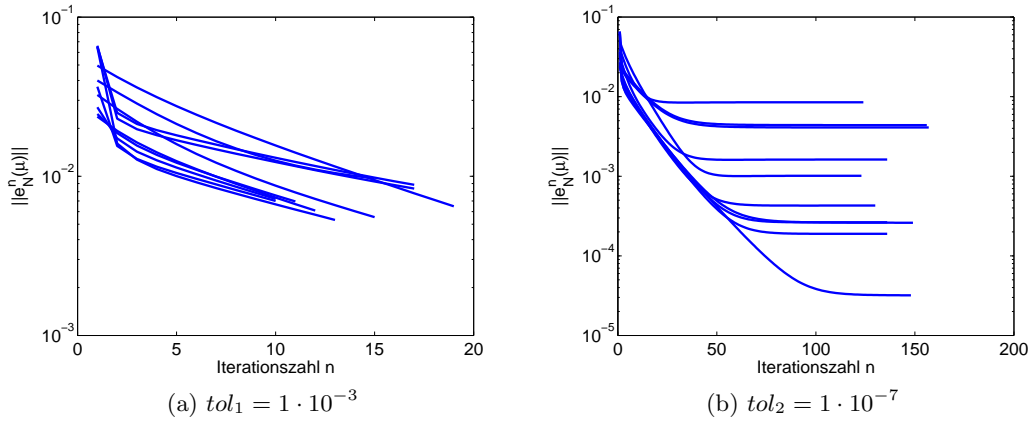


Abbildung 6.6: Fehler $\|u_N^n(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}}$ der Iterierten aus der reduzierten Simulation FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems zu den Test-Parametern aus Tabelle 6.2, $h = 0.0884$

Wir benutzen nun Basen, die genau wie im vorigen Abschnitt konstruiert wurden. Das reduzierte iterative Verfahren wird gestartet und nach 10 und 100 Iterationsschritten sowohl der Fehlerschätzer als auch der echte Fehler berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.3 und Abbildung 6.7 zu sehen. In Abbildung 6.7 ist die Effektivität $\Delta_N^n(\mu)/\|e_N^n(\mu)\|_{\hat{X}}$ des Fehlerschätzers für 3 der 10 Test-Parameter veranschaulicht.

μ -Vektor	$\Delta_N^{10}(\mu)$	$\ e_N^{10}(\mu)\ _{\hat{X}}$	$\Delta_N^{100}(\mu)$	$\ e_N^{100}(\mu)\ _{\hat{X}}$
(6.524, 1.664, 3.210, 0.062)	0.106	$7.56 \cdot 10^{-3}$	$8.32 \cdot 10^{-4}$	$4.06 \cdot 10^{-4}$
(4.926, 9.330, 9.354, 0.680)	0.101	$5.39 \cdot 10^{-3}$	$8.01 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-6}$
(8.125, 7.178, 6.823, 0.217)	0.097	$6.74 \cdot 10^{-3}$	$3.63 \cdot 10^{-4}$	$5.63 \cdot 10^{-5}$
(8.290, 3.984, 7.875, 0.215)	0.099	$6.70 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$3.70 \cdot 10^{-4}$
(4.265, 4.030, 5.841, 0.220)	0.089	$6.77 \cdot 10^{-3}$	$9.14 \cdot 10^{-4}$	$2.59 \cdot 10^{-4}$
(7.838, 5.353, 6.440, 0.246)	0.097	$6.64 \cdot 10^{-3}$	$5.67 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$
(3.066, 4.041, 7.517, 0.946)	0.124	$6.31 \cdot 10^{-3}$	$5.27 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-3}$
(2.858, 9.030, 1.511, 0.423)	0.149	$8.40 \cdot 10^{-3}$	$3.68 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$
(8.481, 4.905, 9.694, 9.867)	0.107	$5.13 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$
(1.899, 2.781, 8.950, 0.107)	0.109	$7.13 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$5.92 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.3: Vergleich des Fehlerschätzers mit dem echten Fehler, $h = 0.0884$

Im Fall $h = 0.0884$ ist die schlechteste Effektivität der Tests aus Tabelle 6.3 nach 10 Iterationsschritten 20.926, die schlechteste Effektivität nach 100 Iterationsschritten 12.642. Bei $h = 0.0221$ erhalten wir im schlechtesten Fall nach 10 Schritten 39.613 und nach 100 Schritten 16.002. Es fällt auf, dass der Fehlerschätzer mit steigender Iterationszahl besser wird. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Folge der $\Delta_N^n(\mu)$'s gegen den Wert des Schätzers aus Korollar 4.15 für den Fehler $\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_{\hat{X}}$.

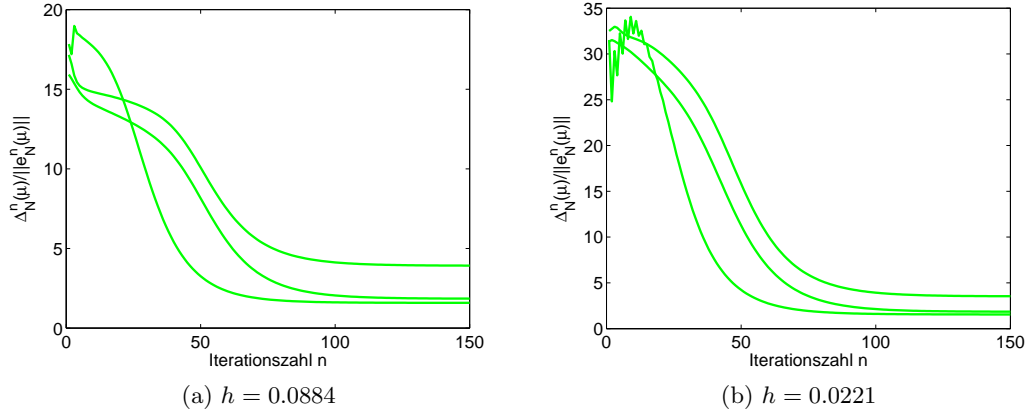


Abbildung 6.7: Effektivitäten $\Delta_N^n(\mu)/\|e_N^n(\mu)\|_{\hat{X}}$ zum 1., 4. und 8. Test-Parameter aus Tabelle 6.3

6.4 Reproduktion

In diesem Abschnitt soll sowohl die Reproduktion der Iterierten, als auch die Reproduktion der Lösung numerisch überprüft werden. Dazu benutzen wir dieselbe Basis-konstruktion wie im vorigen Kapitel (DS-Methode, siehe 6.5.4) und $h = 0.0884$, wodurch wir Konformität des Raumes X_N , welche Voraussetzung für die Reproduktion ist, gewährleistet haben. In diesem Abschnitt sei der zufällig gewählte Parameter $\mu^* := (7.799, 0.335, 6.182, 0.327)$ fest. Tests mit weiteren zufällig gewählten Parametern ergaben vergleichbare Ergebnisse.

6.4.1 Reproduktion der Iterierten

Wir generieren die Basen aus den Iterierten $u_k^n(\mu^*)$, $k = 1, 2$, $n = 1, \dots, 10$. Die Dimensionen der erhaltenen Basen sind $N_1^0 = 10$, $N_1^\Gamma = N_2^\Gamma = 7$, $N_2^0 = 0$. Nun setzen wir $\theta_N^n(\mu^*) = \theta^n(\mu^*) = \theta_{\text{appr}}(\mu^*)$ für $n \geq 1$ und führen das reduzierte Verfahren durch. Alle Voraussetzungen für Satz 4.2 sind erfüllt und die Iterierten müssten reproduziert werden. In Tabelle 6.4 sieht man den Fehler $e_{N, \text{repr}}^n(\mu^*) = \|u^n(\mu^*) - u_N^n(\mu^*)\|_{\hat{X}}$ und den Fehler $e_N^n(\mu^*) = \|u(\mu^*) - u_N^n(\mu^*)\|_{\hat{X}}$ für $n = 1, \dots, 10$.

Man sieht, dass sich die Iterierten kaum unterscheiden. Das Endergebnis der reduzierten Simulation mit der Toleranz $\text{tol}_{N,3} = 1 \cdot 10^{-14}$ ist ein Abbruch nach $\bar{n}(\mu^*) = 143$ Schritten und ein Fehler $e_N^{\bar{n}(\mu^*)}(\mu^*) = 3.03 \cdot 10^{-6}$. In den Räumen, die aus den Iterierten konstruiert wurden, leben also Funktionen, die die Lösung $u(\mu^*)$ noch besser approximieren, als die Iterierten selbst.

6.4.2 Reproduktion der Lösung

Aus dem detaillierten iterativen Verfahren erhalten wir eine sehr genaue Approximation der Lösung $u(\mu^*)$ des detaillierten unzerlegten Problems. Aus dieser generieren wir die Basen. Die Dimensionen sind $N_1^0 = N_1^\Gamma = N_2^\Gamma = 1$ und $N_2^0 = 0$. Die Lösung des detaillierten unzerlegten Problems wird im reduzierten vollen Problem reproduziert und demnach müsste das reduzierte iterative Verfahren nun gegen diese konvergieren. Mit der Toleranz $\text{tol}_{N,3} = 1 \cdot 10^{-14}$ endet das reduzierte Verfahren nach $\bar{n}(\mu^*) = 29$ Schritten mit einem Fehler $e_N^{\bar{n}(\mu^*)}(\mu^*) = 5.95 \cdot 10^{-14}$. Die Reproduktion der Lösung ist dadurch

n	$\ e_{N,\text{repr}}^n(\mu^*)\ _{\hat{X}}$	$\ e_N^n(\mu^*)\ _{\hat{X}}$
1	$2.12 \cdot 10^{-13}$	0.027
2	$1.90 \cdot 10^{-12}$	0.019
3	$6.57 \cdot 10^{-12}$	0.014
4	$1.00 \cdot 10^{-11}$	0.010
5	$3.50 \cdot 10^{-12}$	$7.54 \cdot 10^{-3}$
6	$7.62 \cdot 10^{-12}$	$5.74 \cdot 10^{-3}$
7	$5.12 \cdot 10^{-12}$	$4.42 \cdot 10^{-3}$
8	$7.27 \cdot 10^{-12}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$
9	$9.48 \cdot 10^{-12}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$
10	$3.09 \cdot 10^{-12}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6.4: Fehler der reproduzierten Iterierten im reduzierten Verfahren zu den Iterierten aus dem detaillierten Verfahren und Fehler zur unzerlegten FE-Lösung.

numerisch bestätigt und wird in Abbildung 6.8 noch einmal mit der Reproduktion der Iterierten verglichen.

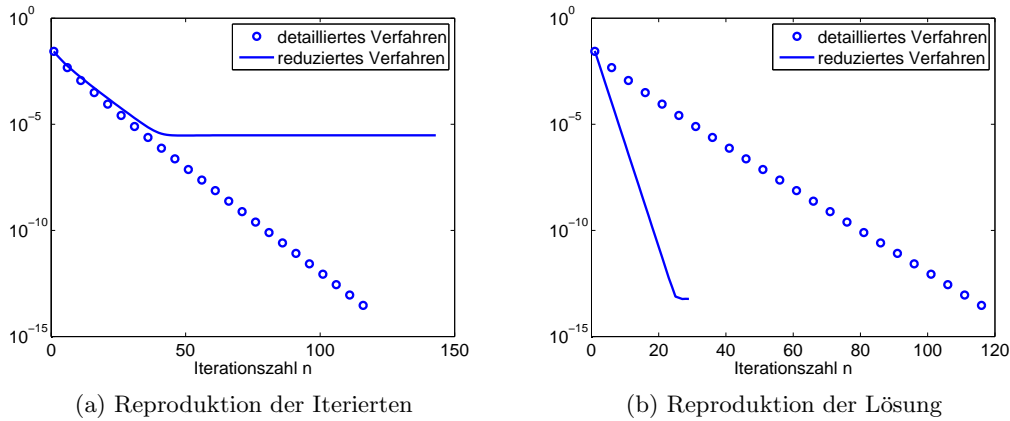


Abbildung 6.8: Vergleich der Fehler zur FE-Lösung des detaillierten unzerlegten Problems aus der detaillierten $\|u^n(\mu^*) - u(\mu^*)\|_{\hat{X}}$ und der reduzierten Simulation $\|u_N^n(\mu^*) - u(\mu^*)\|_{\hat{X}}$

Wir sehen also, dass eine gute Konvergenz im reduzierten Verfahren nicht zwingend davon abhängt, wie gut die Iterierten approximiert werden. Die Approximation und auch die Konvergenz des Verfahrens ist hier viel besser, als bei den obigen Basen aus den Iterierten. Außerdem sind die Basen viel kleiner, was auch ein Vorteil ist.

6.5 Basisgenerierung

6.5.1 Der Greedy-Algorithmus

Mit $\Phi_{N,k}^0$ bzw. $\Phi_{N,k}^\Gamma$ bezeichnen wir die Basen von $X_{N,k}^0$ bzw. $X_{N,k}^\Gamma$ für $k = 1, 2$. Von den Basen hängt ab, wie gut die Lösung $u(\mu)$ des detaillierten unzerlegten Problems

approximiert werden kann. Ziel ist es deshalb, die Basis so zu generieren, dass der Fehler für alle Parameter $\mu \in \mathcal{P}$ minimal wird, bzw. unter einer gegebenen Toleranz ϵ_{tol} liegt. Dazu führen wir eine endliche Trainingsmenge $\mathcal{M}_{\text{train}} \subset \mathcal{P}$ ein und betrachten den Fehler auf dieser Testmenge anstatt auf ganz \mathcal{P} . Außerdem können wir anstatt des Fehlers den Fehlerschätzer $\Delta_N^n(\mu)$ betrachten, da wir gesehen haben, dass dieser für große n sehr effektiv ist. Unser Ziel ist also

$$\max_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \Delta_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu) \leq \epsilon_{\text{tol}}.$$

Mit $\bar{n}(\mu)$ bezeichnen wir je nach Kontext die Anzahl der in der detaillierten/reduzierten Simulation benötigten Iterationsschritte (falls das Verfahren wiederholt wurde, ist die Anzahl Iterationsschritte des letzten Verfahrens gemeint), d.h. $u^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ ist die letzte Iterierte der detaillierten Simulation und $u_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ ist die letzte Iterierte der reduzierten Simulation.

Definition 6.1 (Greedy-Algorithmus):

Gegeben seien initiale Basen $\Phi_{N,k}^0$ und $\Phi_{N,k}^\Gamma$ für $k = 1, 2$, eine Trainingsmenge $\mathcal{M}_{\text{train}} \subset \mathcal{P}$, eine Fehlertoleranz ϵ_{tol} und natürliche Zahlen $N_{k,\text{max}}^0, N_{k,\text{max}}^\Gamma$ für $k = 1, 2$. Der Greedy-Algorithmus ist dann gegeben durch

- *Greedy-Algorithmus:*
 - solange $\max_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \Delta_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu) > \epsilon_{\text{tol}}$
 - $\mu^* := \arg \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \Delta_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$
 - führe die detaillierten Simulation für μ^* durch
 - für $k = 1, 2$ und $* \in \{0, \Gamma\}$: erweitere die Basis $\Phi_{N,k}^*$, falls $|\Phi_{N,k}^*| < N_{k,\text{max}}^*$
 - falls $|\Phi_{N,k}^*| = N_{k,\text{max}}^*$ für $k = 1, 2$ und $* \in \{0, \Gamma\}$, breche ab

Da die Trainingsmenge sehr groß sein kann, zahlt es sich hier aus, dass der Fehlerschätzer Online-berechenbar ist. Offen ist noch, wie die Basen mithilfe einer detaillierten Simulation erweitert werden. Es folgen nun einige numerischer Untersuchungen, die zum Ziel haben, eine möglichst gute Aufbau-/Erweiterungsstrategie für die Basen finden.

Definition 6.2 (Schema 1):

Gegeben seien die RB-Räume $X_{N,1}^0, X_{N,1}^\Gamma, X_{N,2}^\Gamma$ und Funktionen $\xi_1^0 \in X_1, \xi_1^\Gamma \in X_1$ und $\xi_2 \in X_2$. Dann definieren wir eine Erweiterung der RB-Räume durch

- *Schema 1*
 - falls $\xi_1^0 - \mathbb{P}_{X_{N,1}^0} \xi_1^0 \neq 0$
 - $X_{N,1}^0 := X_{N,1}^0 \cup \text{span}(\xi_1^0)$
 - falls $\gamma \xi_1^\Gamma - \mathbb{P}_{\gamma(X_{N,1}^\Gamma)} \gamma \xi_1^\Gamma \neq 0$
 - $X_{N,1}^\Gamma := X_{N,1}^\Gamma \cup \text{span}(\xi_1^\Gamma)$
 - falls $\xi_2 - \mathbb{P}_{X_{N,2}^\Gamma} \xi_2 \neq 0$
 - $X_{N,2}^\Gamma := X_{N,2}^\Gamma \cup \text{span}(\xi_2)$
 - falls nicht II, III aus Bedingungen 3.7
 - $X_{N,2}^\Gamma := X_{N,2}^\Gamma \setminus \text{span}(\xi_2)$

Dabei bezeichnet \mathbb{P} die orthogonale Projektion auf den jeweiligen Unterraum; auf $X_{N,1}^0$ bzgl. dem X_1 -Skalarprodukt, auf $\gamma(X_{N,1}^\Gamma)$ bzgl. dem $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt und auf $X_{N,2}^\Gamma$ bzgl. dem X_2 -Skalarprodukt.

Nach Konstruktion sind so alle Bedingungen aus 3.7 erfüllt. Der Raum $X_{N,2}^0$ ist für die Durchführung des Verfahrens nicht zwingend erforderlich, wird aber später noch eingeführt. Das Lemma 3.13 und die niedrige Dimension der RB-Räume motivieren für $X_{N,1}^0$, $X_{N,1}^\Gamma$ und $X_{N,2}^\Gamma$ bzgl. den in Definition 6.2 zugeordneten Skalarprodukten Orthonormalbasen zu berechnen. Wir tun dies schrittweise, indem wir einen neuen Vektor ξ_k^* folgendermaßen verarbeiten:

$$\begin{aligned}\varphi_{N,k}^* &:= \xi_k^* - \mathbb{P}_{X_{N,k}^*} \xi_k^* , \\ \phi_{N,k}^* &:= \text{POD}(\{\varphi_{N,k}^*\}) , \\ \Phi_{N,k}^* &:= \Phi_{N,k}^* \cup \phi_{N,k}^* .\end{aligned}\tag{6.2}$$

Hier steht $\text{POD}(\cdot)$ für einen mit der POD (Proper Orthogonal Decomposition, [2]) berechneten Raum, welcher eine Orthonormalbasis liefert. Mit dieser Vorgehensweise erhalten wir orthonormale Basen $\Phi_{N,k}^*$. Das Einbauen der POD ermöglicht später in einem Schritt aus einer ganzen Folge von Iterierten die wichtigsten Komponenten auszuwählen. Im Falle eines Vektors wird nur normalisiert.

Für die Wahl von ξ_1^0 , ξ_1^Γ und ξ_2 gibt es nun mehrere Möglichkeiten, die in den folgenden Abschnitten untersucht werden. Wir diskretisieren dazu das Parametergebiet mit einem uniformen $2 \times 2 \times 2 \times 2$ -Gitter. Für jeden der 16 Punkte der Parameter-Diskretisierung führen wir dann die detaillierte Simulation für $h = 0.0884$ und durch und erweitern die Basen nach Schema 1. Darauffolgend werden die Basen mit der reduzierten Simulation für den zufällig gewählten Parametervektor $\mu^* = (8.162, 4.552, 9.509, 0.521)$ getestet. Die Tests wurden auch mit weiteren zufälligen Parametern durchgeführt. Diese Tests werden hier nicht aufgeführt, da sie zum gleichen Ergebnis führten. Insbesondere ist μ^* kein Punkt der Parameter-Diskretisierung.

6.5.2 Reine Snapshots

Die Ergebnisse aus Abschnitt 6.4 motivieren Ansätze zu testen, bei denen nur die beste Approximation an die Lösung des detaillierten unzerlegten Problems in die RB-Räume eingearbeitet wird. Wir nennen diesen Ansatz ‘‘Reine Snapshots’’. In dem ersten Basisgenerierungstest soll der Raum $X_{N,1}$ in jedem Schritt nur eine Dimension hinzugewinnen, indem entweder $\xi_1^0 := u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ oder $\xi_1^\Gamma := u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ gesetzt wird. Außerdem setzen wir $\xi_2 := u_2^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$. Wir testen verschiedene Verhältnisse der Dimensionen N_1^0 und N_1^Γ , indem wir eine maximale Dimension $N_{1,\max}^0$ für N_1^0 vorgeben. Es wird immer zuerst das Schema für $X_{N,1}^0$ ausgeführt. Nur falls $\xi_1^0 - \mathbb{P}_{X_{N,1}^0} \xi_1^0 = 0$ oder $N_1^0 = N_{1,\max}^0$, wird das Schema für $X_{N,1}^\Gamma$ ausgeführt. Nach Fertigstellung der Basen führen wir das reduzierte iterative Verfahren für den oben gewählten Parametervektor μ^* durch und berechnen für $n_1 = 100$ und $n_2 = 1000$ jeweils den Fehler zur vollen Lösung. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 6.5. Wir halten einige Beobachtungen fest.

- Anhand der Dimensionen sehen wir, dass immer $N_2^\Gamma \leq N_1^\Gamma$ gilt. Dies ist eine sehr starke Restriktion an den Raum $X_{N,2}^\Gamma$. Unter Umständen muss man den Raum $X_{N,2}^0$ vergrößern, obwohl dieser nicht zwingend erforderlich ist, um mehr Informationen in $X_{N,2}$ zu stecken.

$N_{1,\max}^0$	$(N_1^0, N_1^\Gamma, N_2^0, N_2^\Gamma)$	$\theta_{N,\text{appr}}(\mu^*)$	$\ e_N^{n_1}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$	$\ e_N^{n_2}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$
0	(0, 16, 0, 16)	$8.91 \cdot 10^{-8}$	0.316	0.166
1	(1, 15, 0, 15)	$1.02 \cdot 10^{-7}$	0.185	0.090
2	(2, 14, 0, 14)	$5.95 \cdot 10^{-9}$	0.415	0.306
3	(3, 13, 0, 13)	$5.19 \cdot 10^{-7}$	0.182	0.075
4	(4, 12, 0, 12)	$3.44 \cdot 10^{-7}$	0.159	0.063
5	(5, 11, 0, 11)	$2.23 \cdot 10^{-5}$	0.032	0.017
6	(6, 10, 0, 10)	$1.22 \cdot 10^{-4}$	0.022	0.011
7	(7, 9, 0, 9)	$3.74 \cdot 10^{-4}$	0.014	0.011
8	(8, 8, 0, 8)	$3.39 \cdot 10^{-4}$	0.021	0.019
9	(9, 7, 0, 7)	$2.32 \cdot 10^{-4}$	0.020	0.019
10	(10, 6, 0, 6)	$1.63 \cdot 10^{-4}$	0.020	0.020
11	(11, 5, 0, 5)	$3.91 \cdot 10^{-4}$	0.023	0.022
12	(12, 4, 0, 4)	0.021	0.023	0.023
13	(13, 3, 0, 3)	0.459	0.023	0.023
14	(14, 2, 0, 2)	0.500	0.023	0.023
15	(15, 1, 0, 1)	0.498	0.023	0.023

Tabelle 6.5: Basisgenerierungstest ‘‘Reine Snapshots’’, $N_{1,\max}^0$ vorgegeben, $n_1 = 100$, $n_2 = 1000$

- Das Verfahren läuft auch für $N_1^0 = 0$. In diesem speziellen Fall ist eine Funktion aus $X_{N,1}$ nur durch die Randbedingung auf dem Interface voll bestimmt. Allerdings konvergiert das Verfahren sehr langsam.
- Je größer $N_{1,\max}^0$, desto besser der Relaxationparameter und daher die Konvergenz.
- Je kleiner $N_{1,\max}^0$, desto mehr Basisfunktionen haben wir insgesamt. Wir erwarten, dass der Fehler kleiner wird, je mehr Basisfunktionen wir haben. Dass dies in den obersten 6 Zeilen nicht so ist, liegt daran, dass das Verfahren so langsam konvergiert. Für $N_{1,\max}^0 = 6, 7$ erbringt der Kompromiss zwischen möglichst viel Basisfunktionen in $X_{N,1}^0$ und möglichst viel Basisfunktionen insgesamt das beste Ergebnis.

6.5.3 Bubble-Funktionen

Wir untersuchen nun, ob sich die Konvergenz-Eigenschaft stabilisieren lässt, wenn parallel zu $X_{N,1}^\Gamma$ auch $X_{N,1}^0$ um zusätzliche Funktionen erweitert wird. Die Wahl $\xi_1^0 = u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu) = \xi_1^\Gamma$ ist nicht zulässig, da die Gesamtheit der Basisfunktionen in $X_{N,1}$ dann nicht mehr linear unabhängig ist. Stattdessen setzen wir $\xi_1^0 := u_1^1(\mu)$. Da wir $g^0(\mu) = 0$ und $\gamma u_1^1(\mu) = g^0(\mu)$ haben, gilt dann $X_{N,1}^0 \subset X_1^0$ und wir bekommen den Snapshot aus dem detaillierten iterativen Verfahren geschenkt. Insbesondere löst die Bubble-Funktion

$u_1^1(\mu)$ folgende Differentialgleichung auf Ω_1 :

$$\begin{aligned} a_1(u_1^1(\mu), v; \mu) &= f_1(v; \mu), & \forall v \in X_1^0, \\ \gamma u_1^1(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Wir testen diese Vorgehensweise (“Bubble-Funktionen”, BF) wieder mit Vorgabe von $N_{1,\max}^0$ und n_1, n_2 und μ^* wie oben. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.6 zu sehen.

$N_{1,\max}^0$	$(N_1^0, N_1^\Gamma, N_2^0, N_2^\Gamma)$	$\theta_{N,\text{appr}}(\mu^*)$	$\ e_N^{n_1}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$	$\ e_N^{n_2}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$
1	(1, 16, 0, 16)	$7.35 \cdot 10^{-8}$	0.066	0.050
2	(2, 16, 0, 16)	$8.52 \cdot 10^{-8}$	0.169	0.093
3	(3, 16, 0, 16)	$8.23 \cdot 10^{-8}$	0.161	0.118
4	(4, 16, 0, 16)	$7.45 \cdot 10^{-8}$	0.180	0.139
5	(5, 16, 0, 16)	$7.54 \cdot 10^{-8}$	0.160	0.138
6	(6, 16, 0, 16)	$6.27 \cdot 10^{-8}$	0.163	0.157
7	(7, 16, 0, 16)	$5.92 \cdot 10^{-8}$	0.154	0.132
8	(8, 16, 0, 16)	$2.65 \cdot 10^{-8}$	0.162	0.138
9	(9, 16, 0, 16)	$1.42 \cdot 10^{-8}$	0.071	0.059
10	(10, 16, 0, 16)	$1.06 \cdot 10^{-8}$	0.045	0.045
11	(11, 16, 0, 16)	$9.02 \cdot 10^{-9}$	0.037	0.037
12	(12, 16, 0, 16)	$3.12 \cdot 10^{-6}$	0.037	0.036
13	(13, 16, 0, 16)	$1.69 \cdot 10^{-6}$	0.037	0.036
14	(14, 16, 0, 16)	$1.13 \cdot 10^{-6}$	0.036	0.035
15	(15, 16, 0, 16)	$5.69 \cdot 10^{-4}$	0.023	$5.86 \cdot 10^{-3}$
16	(16, 16, 0, 16)	$3.89 \cdot 10^{-3}$	$7.74 \cdot 10^{-3}$	$1.64 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.6: Basisgenerierungstest “Bubble-Funktionen”, $N_{1,\max}^0$ vorgegeben, $n_1 = 100$, $n_2 = 1000$

Bei Hinzufügen von 5 oder 10 zusätzlichen Funktionen in $X_{N,1}^0$ macht sich keine Besserung bemerkbar. Wenn man aber zu jedem Snapshot $u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ für $X_{N,1}^\Gamma$ auch $\xi_1^0 = u_1^1(\mu)$ für $X_{N,1}^0$ hinzunimmt, wird der Fehler $\|e_N^{n_2}(\mu^*)\|_{\hat{X}}$ im Vergleich zu Tabelle 6.5 um 2 Größenordnungen kleiner. Dabei hat sich die Anzahl der Basisfunktionen nur um den Faktor 1.5 vergrößert.

6.5.4 Durchgeschnittene Snapshots

Nach Konstruktion wird mit den Funktionen aus $X_{N,1}^\Gamma$ die Randbedingung des Dirichlet-Problems erfüllt und mit den Funktionen aus $X_{N,1}^0$ die Differentialgleichung auf Ω_1 . Wir verfolgen nun einen Ansatz, bei dem ξ_1^Γ überall 0 ist, außer in den Freiheitsgraden auf dem Rand. Außerdem soll $\xi_1^0 + \xi_1^\Gamma = u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ gelten, damit die Lösung reproduziert wird. Dies erreichen wir, indem wir die Snapshots “durchschneiden”; wir setzen

$$\begin{aligned} \xi_1^\Gamma &:= R_1 \gamma u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu), \\ \xi_1^0 &:= u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu) - R_1 \gamma u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu), \end{aligned}$$

mit der Fortsetzung R_1 aus Abschnitt 6.3.2. An der Konstruktion von $X_{N,2}$ ändern wir vorerst nichts. Auf Ω_1 haben wir damit “bubble-” und “port-” Funktionen wie bei der erweiterten RBEM von Huynh et al. [11]. Wir vergleichen diese Methode (“Durchgeschnittene Snapshots”, DS) mit der BF-Methode, indem wir ohne Vorgabe von $N_{1,\max}^0$ auf dem bisherigen 2^4 -Parametergitter und auf einem ebenfalls uniformen 3^4 -Parametergitter die Basen generieren und anschließend wieder die Fehler in der reduzierten Simulation für μ^* berechnen.

Methode	Gitter	$(N_1^0, N_1^\Gamma, N_2^0, N_2^\Gamma)$	$\theta_{N,\text{appr}}(\mu^*)$	$\ e_N^{n_1}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$	$\ e_N^{n_2}(\mu^*)\ _{\hat{X}}$
BF	2^4	(16, 16, 0, 16)	$4.60 \cdot 10^{-3}$	$6.92 \cdot 10^{-3}$	$1.45 \cdot 10^{-4}$
	3^4	(24, 18, 0, 18)	0.096	$2.21 \cdot 10^{-6}$	$2.21 \cdot 10^{-6}$
DS	2^4	(16, 16, 0, 16)	0.058	$7.76 \cdot 10^{-4}$	$7.77 \cdot 10^{-4}$
	3^4	(26, 18, 0, 18)	0.059	$8.68 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 6.7: Basisgenerierungstest, Vergleich “Durchgeschnittene Snapshots” (DS) mit “Bubble-Funktionen” (BF), $n_1 = 100$, $n_2 = 1000$

Beim Vergleich in Tabelle 6.7 unterscheiden sich die Fehler kaum, jedoch scheint die DS-Methode stabiler bzgl. des Relaxationsparameters zu sein. Dies wird im folgenden Experiment bestätigt. Es werden die Relaxationsparameter in Abhängigkeit der Basisgröße verglichen. Die Basen werden erstellt, indem die Generierung auf dem 2^4 -Gitter gestartet wird und abgebrochen wird, wenn die gewünschte Basisgröße erreicht ist. In Abbildung 6.9 wird der Verlauf der Relaxationsparameter für die 3 zufälligen Parameter $\mu^1 = (3.869, 6.474, 3.275, 0.465)$, $\mu^2 = (2.815, 4.033, 3.260, 0.625)$, $\mu^3 = (9.160, 2.921, 2.862, 0.694)$ veranschaulicht.

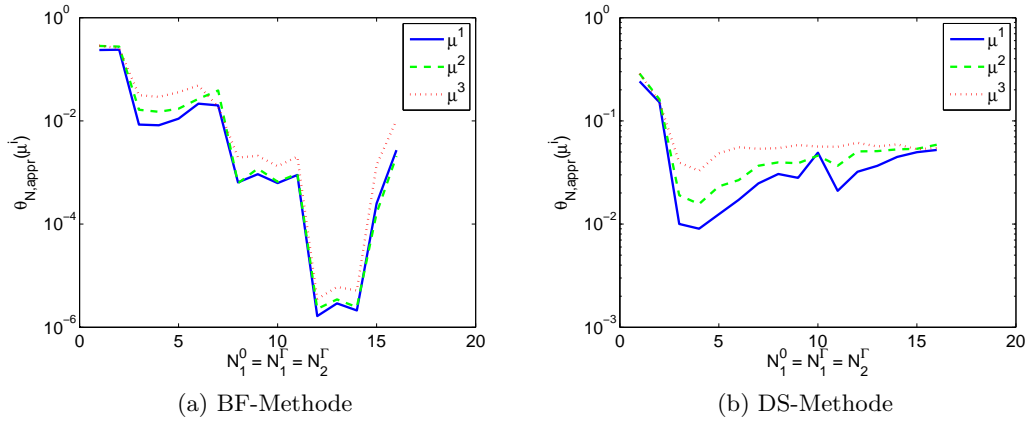


Abbildung 6.9: Vergleich der Relaxationsparameter abhängig von der Größe der Basen bei der BF- und der DS-Methode, $N_2^0 = 0$

Ein Relaxationsparameter im Bereich $1 \cdot 10^{-5}$ führt zu einer sehr langen Laufzeit der reduzierten Simulation. Damit ist die BF-Methode nicht für den Greedy-Algorithmus geeignet, da dort in jedem Schritt eine Vielzahl an reduzierten Simulationen ausgeführt werden muss. Bei der DS-Methode sind die Werte akzeptabel.

6.5.5 DS-Greedy

Nun wird der Greedy-Algorithmus 6.1 umgesetzt. Dazu legen wir die DS-Methode als Basiserweiterungsmethode fest. Es sei daran erinnert, dass bei der DS-Methode gilt

$$\begin{aligned}\xi_1^\Gamma &:= R_1 \gamma u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu), \\ \xi_1^0 &:= u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu) - R_1 \gamma u_1^{\bar{n}(\mu)}(\mu), \\ \xi_2 &:= u_2^{\bar{n}(\mu)}(\mu).\end{aligned}$$

Wir haben bisher kein Schema für den Raum $X_{N,2}^0$ miteinbezogen, weil dies bei der 16-Parameter-Diskretisierung nicht notwendig war. Das reduzierte Problem auf Ω_2 wird alleine durch die Funktionen aus $X_{N,2}^\Gamma$ gut gelöst. Wie aber schon bemerkt, ist N_2^Γ durch N_1^Γ beschränkt. Da $X_{N,1}^\Gamma$ Funktionen approximiert, die auf dem eindimensionalen Interface leben und $X_{N,2}^\Gamma$ Funktionen, die auf ganz Ω_2 leben, könnte dies eine zu starke Restriktion sein. Insbesondere für die Durchführung eines Greedy-Algorithmus könnte dies ein Hindernis sein, da es zu einer Stagnation kommen kann, wenn der Raum $X_{N,2}^\Gamma$ nicht erweitert wird. Wir erweitern daher das bisherige Schema aus Definition 6.2 darin, dass in letzterem Fall der Raum $X_{N,2}^0$ erweitert wird.

Definition 6.3 (Schema 2):

Gegeben seien die RB-Räume $X_{N,1}^0$, $X_{N,1}^\Gamma$, $X_{N,2}^\Gamma$, $X_{N,2}^0$ und Funktionen $\xi_1^0 \in X_1$, $\xi_1^\Gamma \in X_1$ und $\xi_2 \in X_2$. Dann definieren wir eine Erweiterung der RB-Räume durch

- *Schema 2*
 - falls $\xi_1^0 - \mathbb{P}_{X_{N,1}^0} \xi_1^0 \neq 0$
 - $X_{N,1}^0 := X_{N,1}^0 \cup \text{span}(\xi_1^0)$
 - falls $\xi_2 - \mathbb{P}_{X_{N,2}^\Gamma} \xi_2 \neq 0$
 - falls $\gamma \xi_2 - \mathbb{P}_{\gamma(X_{N,2}^\Gamma)} \gamma \xi_2 \neq 0$
 - $X_{N,2}^\Gamma := X_{N,2}^\Gamma \cup \text{span}(\xi_2)$
 - $X_{N,1}^\Gamma := X_{N,1}^\Gamma \cup \text{span}(R_1 \gamma \xi_2)$
 - andernfalls
 - $X_{N,2}^0 := X_{N,2}^0 \cup \text{span}(\xi_2 - \gamma^{-1} \mathbb{P}_{\gamma(X_{N,2}^\Gamma)} \gamma \xi_2)$

Dabei bezeichnet \mathbb{P} die orthogonale Projektion auf den jeweiligen Unterraum; auf $X_{N,1}^0$ bzgl. dem X_1 -Skalarprodukt, auf $X_{N,2}^\Gamma$ bzgl. dem X_2 -Skalarprodukt und auf $\gamma(X_{N,2}^\Gamma)$ bzgl. dem $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt.

So sind nach Konstruktion die Bedingungen 3.7 erfüllt, falls alle Räume komplett nach diesem Schema konstruiert sind. Wegen Bedingung II aus 3.7 ist $\gamma^{-1} \mathbb{P}_{\gamma(X_{N,2}^\Gamma)} \gamma \xi_2$ wohldefiniert. Mit diesem Schema ist also gewährleistet, dass $X_{N,2}$ auch erweitert wird, wenn auf dem Interface keine neue Information vorhanden ist, bzw. alle Freiheitsgrade ausgeschöpft sind. Weiter ist durch das Fortsetzen der Randwerte von ξ_2 die Komformität des Raumes X_N gewährleistet. Wir geben dann die Orthonormalität der Basis $\Phi_{N,1}^\Gamma$ auf und können leicht eine eins-zu-eins Identifikation der Basisvektoren von $X_{N,1}^\Gamma$

und $X_{N,2}^\Gamma$ auf dem Interface herstellen, indem wir die Basiserweiterung $\phi_{N,2}^\Gamma$ wie in (6.2) berechnen und dann

$$\phi_{N,1}^\Gamma := \{R_1(\gamma\varphi_{N,2}^\Gamma) \mid \varphi_{N,2}^\Gamma \in \phi_{N,2}^\Gamma\}$$

setzen. Die Basis $\Phi_{N,2}^0$ von $X_{N,2}^0$ ist eine Orthonormalbasis und wird nach dem Prinzip aus (6.2) berechnet. An der Berechnung von $\Phi_{N,1}^0$ ändert sich nichts.

Wir testen nun den Greedy-Algorithmus mit der DS-Methode. Die initialen Basen werden aus einem Snapshot zu einem zufälligen Parameter mit Schema 2 berechnet. Als Toleranz für den Fehlerschätzer im Greedy-Algorithmus wählen wir $\epsilon_{\text{tol}} = 1 \cdot 10^{-6}$. Für die Berechnung von $\Delta_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$ wählen wir im reduzierten Verfahren die Toleranz $\text{tol}_{N,3} = 1 \cdot 10^{-14}$. Wir definieren dann

$$\begin{aligned} w_\theta &:= \min_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \theta_{N,\text{appr}}(\mu) \\ m_\Delta &:= \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \Delta_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu) \\ m_e &:= \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{train}}} \|e_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)\|_{\hat{X}} \\ N &:= N_1 + N_2 = N_1^0 + N_1^\Gamma + N_2^0 + N_2^\Gamma. \end{aligned}$$

In Abbildung 6.10 ist der Verlauf von m_Δ im Greedy-Algorithmus abgebildet. Es wurde mit 2 verschiedenen FE-Diskretisierungen und 3 verschiedenen Trainingsmengen $\mathcal{M}_{\text{train}}$ getestet. Für den Fall $n_{\text{el}} = 256$ und $|\mathcal{M}_{\text{train}}| = 3^4$ wird außerdem in Abbildung 6.11a m_Δ mit m_e verglichen und in Abbildung 6.11b der Verlauf von w_θ visualisiert.

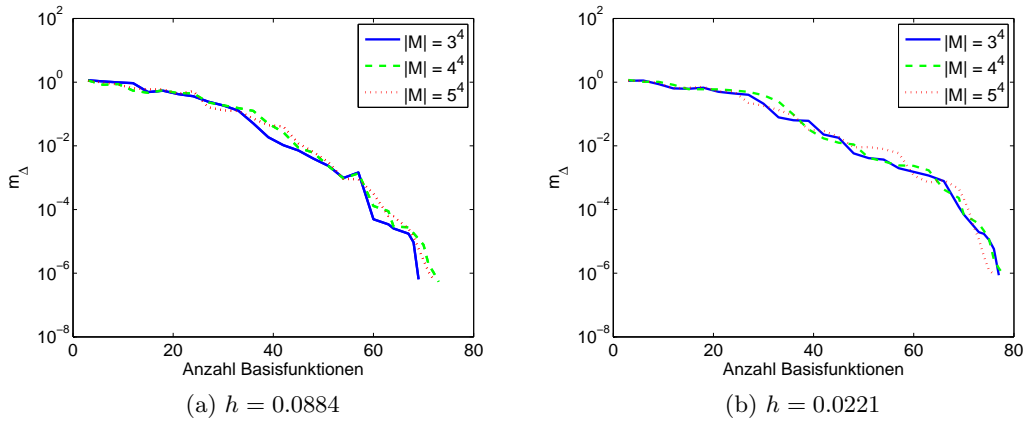


Abbildung 6.10: DS-Greedy: Verlauf von m_Δ in Abhängigkeit von N für 3 verschiedene große Trainingsmengen $\mathcal{M}_{\text{train}}$ und 2 verschiedene FE-Diskretisierungen

Wir halten einige Beobachtungen fest:

- m_Δ nimmt nicht monoton ab, kann aber nach oben und unten durch monoton fallende Folgen eingeschränkt werden.
- Die Größe der Trainingsmenge $\mathcal{M}_{\text{train}}$ hat keinen Einfluss auf die Schnelligkeit der Fehlerabnahme.
- Bei einer Verkleinerung der Schrittweite der FE-Diskretisierung um den Faktor $\frac{1}{4}$ erhöht sich die Anzahl der Basisfunktionen beim Passieren der Toleranz ϵ_{tol} um ca. 5-10%.

Die DS-Methode ist also eine geeignete Wahl für den Greedy-Algorithmus. Das Ziel, auf einer großen Testmenge eine gegebene Toleranz für den Fehler zu erreichen und dabei die niedrige Dimensionalität der RB-Räume zu erhalten, ist erreicht worden. Desweiteren weist die Methode eine gewisse Stabilität bzgl. der Konvergenzgeschwindigkeit im reduzierten Verfahren auf.

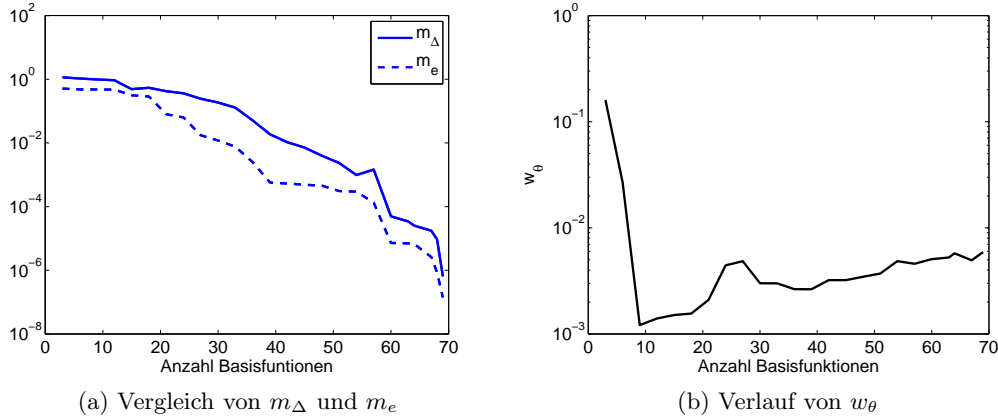


Abbildung 6.11: DS-Greedy: Vergleich von m_Δ und m_e ; Verlauf von w_θ in Abhängigkeit von N für $h = 0.0884$, $|\mathcal{M}_{\text{train}}| = 3^4$

6.6 Zeitmessung

Wie in Kapitel 5 deutlich wurde, kann das reduzierte iterative Verfahren nach einmaliger Durchführung der Offline-Phase viel schneller durchgeführt werden, als das detaillierte iterative Verfahren. Dies wollen wir hier bekräftigen, indem wir einige Rechenzeiten der detaillierten und reduzierten Simulation tabellieren. Dazu nehmen wir die 3 zufällig gewählten Test-Parameter $\mu^1 = (2.140, 0.350, 0.702, 0.922)$, $\mu^2 = (8.047, 0.778, 4.420, 0.863)$ und $\mu^3 = (8.465, 7.002, 5.740, 0.751)$. Die Basisgenerierung als Teil in der Offline-Phase (siehe 5.2.1) wird mit dem DS-Greedy Algorithmus mit $h = 0.0884$ ($n_{\text{el}} = 256$), $\epsilon_{\text{tol}} = 1 \cdot 10^{-6}$ und $|\mathcal{M}_{\text{train}}| = 3^4$ realisiert. Die Anzahl der erhaltenen Basisfunktionen ist 68. Die gesamte Offline-Phase dauerte 765.436s. In Tabelle 6.8 werden nun die Rechenzeiten der detaillierten Simulation (t_{det}) und der reduzierten Simulation (t_{red}) verglichen, dabei ist die Abbruch-Toleranz im reduzierten Verfahren $\text{tol}_N = 1 \cdot 10^{-10}$.

	t_{det}	t_{red}	$t_{\text{det}}/t_{\text{red}}$	Fehler $e_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$
μ^1	1.042s	0.144s	7.236	$4.16 \cdot 10^{-8}$
μ^2	0.915s	0.144s	6.354	$1.36 \cdot 10^{-8}$
μ^3	1.283s	0.150s	8.553	$2.89 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 6.8: Vergleich der Rechenzeiten in der detaillierten und reduzierten Simulation, $h = 0.0884$ und Fehler der letzten Iterierten im reduzierten Verfahren

Der gleiche Test wird noch einmal ausgeführt, diesmal mit $h = 0.0221$ ($n_{\text{el}} = 4096$), siehe Tabelle 6.9. Die Anzahl der erhaltenen Basisfunktionen ist 77 und die gesamte Berechnungszeit der Offline-Phase 7,959.232s.

	t_{det}	t_{red}	$t_{\text{det}}/t_{\text{red}}$	Fehler $e_N^{\bar{n}(\mu)}(\mu)$
μ^1	4.248s	0.084s	50.571	$3.32 \cdot 10^{-7}$
μ^2	3.515s	0.084s	41.845	$6.65 \cdot 10^{-8}$
μ^3	13.237s	0.160s	82.731	$3.07 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 6.9: Vergleich der Rechenzeiten in der detaillierten und reduzierten Simulation, $h = 0.0221$ und Fehler der letzten Iterierten im reduzierten Verfahren

Von Tabelle 6.8 zu Tabelle 6.9 wurde die Schrittweite h geviertelt und trotzdem ändert sich die Anzahl der benötigten Basisfunktionen und damit auch t_{red} kaum. Dementsprechend höher ist der Faktor $t_{\text{det}}/t_{\text{red}}$, d.h. je feiner die FE-Diskretisierung, desto auffallender ist die Beschleunigung.

Kapitel 7

Ausblick

In dieser Arbeit wurde erfolgreich ein iteratives Gebietszerlegungs-Verfahren für die RB-Methode konstruiert. Die numerischen Untersuchungen des erstellten Fehlerschätzers zeigten, dass dieser effektiv und daher anwendbar ist. Es wurde ein Basisgenerierungsverfahren entwickelt, mit dem der Fehler auf einer großen Testmenge reduziert werden kann.

Möglicherweise lässt sich das Ergebnis noch verbessern, indem ein POD-Greedy Verfahren, in dem die ganzen Folgen der Iterierten miteinbezogen werden, zur Basisgenerierung verwendet wird. Zukünftige Arbeiten sollen außerdem die Parallelisierung der Offline-Berechnungen und Anwendungen bzw. Erweiterungen der Theorie auf Multiphysik-Probleme zum Ziel haben.

Literaturverzeichnis

- [1] B. O. Almroth, P. Stern, and F. A. Brogan. Automatic choice of global shape functions in structural analysis. *AIAA Journal*, 16:525–528, 1978.
- [2] A. C. Antoulas. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual Reviews in Control*, 29:181–190, 2005.
- [3] F. Ben Belgacem. The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84:173–197, 1999.
- [4] P. Binev, A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, G. Petrova, and P. Wojtaszczyk. Convergence rates for greedy algorithms in reduced basis methods. *IGPM Report, RWTH Aachen*, 310, 2010.
- [5] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [6] A. Buffa, Y. Maday, A. T. Patera, C. Prud’homme, and G. Turinici. A priori convergence of the greedy algorithm for the parametrized reduced basis. submitted, 2009.
- [7] G.F. Carey. Derivative calculation from finite element solutions. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, 35:1–14, 1982.
- [8] M. A. Grepl and A. T. Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39:157–181, 2005.
- [9] B. Haasdonk. Convergence rates of the POD-greedy method. *Preprint, SRC Simtech*, 2011.
- [10] B. Haasdonk and M. Ohlberger. Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42:277–302, 2008.
- [11] D.B.P. Huynh, D.J. Knezevic, and A.T. Patera. A static condensation reduced basis element method: Approximation and a posteriori error estimation. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2011.
- [12] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, volume 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.
- [13] Y. Maday and E.M. Rønquist. A reduced-basis element method. *Journal of Scientific Computing*, 17:447–459, 2002.
- [14] Y. Maday and E.M. Rønquist. The reduced basis element method: Application to a thermal fin problem. *Journal of Scientific Computing*, 26:240–258, 2004.

- [15] L.D. Marini and A. Quarteroni. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numerische Mathematik*, 55:575–598, 1989.
- [16] I. B. Oliveira and A. T. Patera. Reduced-basis techniques for rapid reliable optimization of systems described by affinely parametrized coercive elliptic partial differential equations. *Optimization and Engineering*, 8:43–65, 2007.
- [17] A.T. Patera and G. Rozza. *Reduced Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parametrized Partial Differential Equations*. MIT, 2006.
- [18] C. Prud’homme, D. V. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Maday, A. T. Patera, and G. Turinici. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124:70–80, 2002.
- [19] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford University Press, 1999.
- [20] A. Toselli and O. Widlund. *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [21] K. Veroy, C. Prud’homme, D. V. Rovas, and A. T. Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximation of parametrized noncoercive and nonlinear elliptic partial differential equations. In *Proceedings of 16th AIAA computational fluid dynamics conference*, 2003. Paper 2003-3847.

Anhang A

Implementierung

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte eine Implementierung der Gebietszerlegungsverfahren in der MATLAB Software-Umgebung RBmatlab. In diesem Kapitel wird die Implementation kurz erklärt. Die Strukturierung ist analog zu den bestehenden RB-Implementierungen in RBmatlab. RBmatlab wird an den Universitäten Stuttgart und Münster von M. Dihlmann, M. Drohmann, B. Haasdonk, M. Ohlberger und M. Schaefer entwickelt und dient vor allem der rechnerischen Realisierung der RB-Methode in MATLAB. Insbesondere sind auch Routinen für hochdimensionale Simulationen vorhanden, zum Beispiel für die FE-Methode oder die Finite Volumen Methode. Gebietszerlegungsverfahren wurden vor dieser Arbeit noch nicht implementiert, weder für die FE-Methode, noch für die RB-Methode.

RBmatlab wird von der Software *git* verwaltet. Auf einem Computer an der Universität Stuttgart kann RBmatlab mit dem shell Kommando

```
git clone /afs/.mathe/project/agh/git/rbmatlab
```

in dem aktuellen Verzeichnis abgelegt werden. Um die Installation abzuschließen, muss folgender Code beim Start von MATLAB ausgeführt werden. Dabei sind die Pfade geeignet zu ersetzen.

```
setenv('RBMATLABHOME','home/matlab/RBmatlab');  
setenv('RBMATLABTEMP','/tmp/matlab');  
addpath(getenv('RBMATLABHOME'));  
startup_rbmatlab
```

Die Implementierung der Gebietszerlegungsverfahren liegt im branch *master* unter dem hash *b2d10ef9fa2785efb85f405e329daee69ece9b6f* vor. Im Verzeichnis *models/* befindet sich die Datei *dom_dec_demo_model.m* in welcher eine Struktur für das Modell aus Abschnitt 6.1 angelegt wird. Im Verzeichnis *rbasis/dom_dec/* befinden sich dann alle Routinen, die für die detaillierte und reduzierte Simulation implementiert wurden. Außerdem wurde eine demo erstellt (*demos/demo_dom_dec.m*), welche die ganze Funktionalität der Implementierung in MATLAB aufzeigt.

A.1 Funktionsweise/Aufruf

Im Folgenden wird beschrieben, welche Funktionen in MATLAB aufgerufen werden müssen, um eine detaillierte bzw. reduzierte Simulation zu starten. Mit dem Aufruf

```
>> base_model = dom_dec_demo_model();
```

wird eine Struktur erstellt, die das Modell repräsentiert. Diese beinhaltet Funktionszeiger für die Datenfunktionen, Wertebereich des Parameter μ , Informationen über die Geometrie, über die Diskretisierung und Funktionszeiger auf die für das Modell geeigneten Simulationswerkzeuge. Jedoch wird noch keine Gebietszerlegung betrachtet, daher der Name *base_model*. Nun wird die Struktur *base_model_data* erstellt.

```
>> base_model_data = gen_model_data(base_model);
```

base_model_data enthält eine Struktur *grid*, welche alle für die Diskretisierung notwendigen Daten des Gitters enthält und eine Struktur *df_info*, welche alle notwendigen Informationen für die diskreten Funktionen, hier FE, enthält. Mit

```
>> base_model = set_mu(base_model, [1.843, 2.878, 8.879, 0.874]);
>> base_sim_data = detailed_simulation(base_model, base_model_data);
```

kann nun eine detaillierte Simulation des unzerlegten Problems durchgeführt werden. Mit dem ersten Befehl wird der Parameter μ auf den gewünschten Wert gesetzt. Die erhaltene Struktur *base_sim_data.uh* repräsentiert die diskrete FE-Lösung und damit die Funktion $u(\mu)$. Diese lässt sich mit folgendem Aufruf visualisieren.

```
>> plot_sim_data(base_model, base_model_data, base_sim_data, []);
```

Um ein Gebietszerlegungsverfahren zu initialisieren, wird nun *base_model* in eine übergeordnete Modell-Struktur eingebunden.

```
>> model = dom_dec_model(base_model, []);
```

Damit ist eine Struktur erstellt, die das Modell *base_model* in einem Gebietszerlegungsmodus repräsentiert. Diese enthält neben dem *base_model* Informationen über die Geometrie der Zerlegung, Einstellungen für die detaillierte und reduzierte Simulation, Einstellungen für die Basisgenerierung und Funktionszeiger auf die notwendigen Routinen. Die Aufrufschritte sind nun analog zu den obigen.

```
>> model_data = gen_model_data(model);
>> model = set_mu(model, [1.843, 2.878, 8.879, 0.874]);
>> sim_data = detailed_simulation(model, model_data);
>> plot_sim_data(model, model_data, sim_data, []);
```

Die Struktur *model_data* enthält nun cell-arrays mit den Gittern und den Informationen für die diskreten Funktionen auf den Teilgebieten. Das cell-array *sim_data.uh* repräsentiert je nach Einstellung eine Auswahl an Iterierten $u_k^n(\mu)$ aus dem iterativen FE-Schema. Mit *plot_sim_data* wird die letzte Iterierte visualisiert.

Für die Basisgenerierung können in *model* viele Einstellungen angepasst werden, so zum Beispiel die Feinheit des Parameter-Gitters, das Erweiterungsschema für die Basen, oder die Toleranz für den Greedy-Algorithmus. Die Basen werden mit

```
>> detailed_data = gen_detailed_data(model, model_data);
```

generiert. Im zweiten Teil der Offline-Phase werden die erforderlichen Matrix- und Vektor-Komponenten durch folgenden Aufruf berechnet.

```
>> reduced_data = gen_reduced_data(model, detailed_data);
```

Die Struktur *reduced_data* enthält dann nur noch die niedrigdimensionalen Objekte für die reduzierte Simulation. Schließlich kann die reduzierte Simulation ausgeführt werden.

```
rb_sim_data = rb_simulation(model,reduced_data);  
rb_sim_data = rb_reconstruction(model,detailed_data,rb_sim_data);
```

Das cell-array *rb_sim_data.uN* enthält Vektoren von Koeffizienten in den reduzierten Basen, die je nach Einstellung eine Auswahl der Iterierten aus dem reduzierten Verfahren repräsentieren. Aus diesen werden mit *rb_reconstruction* die zugehörigen FE-Funktionen rekonstruiert und in *rb_sim_data.uh* gespeichert. Die Werte des Fehlerschätzers sind in *rb_sim_data.Delta* gespeichert. Abschließend kann die letzte Iterierte aus der reduzierten Simulation mit

```
>> plot_sim_data(model,model_data,rb_sim_data,[]);
```

visualisiert werden und der Fehler zur unzerlegten FE-Lösung mit

```
>> rb_sim_data = model.compute_error(model,model_data,rb_sim_data);
```

berechnet und in *rb_sim_data.X_err* eingesehen werden.

Anhang B

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Stuttgart, den 2. September 2011

Immanuel Maier